

**Untersuchung der analytischen Matrizenfunktionen
mittels Reihenentwicklung nach
Faber - Polynomen**

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Wolfgang Reitberger
aus Nürnberg

1976

**Untersuchung der analytischen Matrizenfunktionen
mittels Reihenentwicklung nach
Faber - Polynomen**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Wolfgang Reitberger
aus Nürnberg

1. Referent: Prof. Dr. H. Begehr

2. Referent: Prof. Dr. H. Pachale

Freie Universität Berlin



Tag der letzten Prüfung: 2. Juli 1976

Druck: Zentrale Universitätsdruckerei, V a A 4

INHALTSVERZEICHNIS

I Einleitung

1. Problemstellung der vorliegenden Arbeit 1
2. Übersicht über die Ergebnisse 3

II Die Entwicklung des Begriffs der analytischen Matrizenfunktion

1. Einführung der Matrizenfunktion über Polynome
und Potenzreihen. Der Satz von Weyr 7
2. Die Definition der Matrizenfunktion von Sylvester
und Buchheim 12

III Reihenentwicklungen von Matrizenfunktionen

1. Betrachtungen zur Vollständigkeit des Satzes von
Weyr 17
2. Die Entwicklung der analytischen Matrizenfunktion
nach Faber - Polynomen 18

IV Elementare Eigenschaften der analytischen Matrizenfunktionen

1. Der Satz über die Ähnlichkeitstransformation des
Funktionswertes 24

2. Die Funktionswerte für Diagonalmatrizen, insbesondere Jordansche Normalformen	25
3. Die analytischen Matrizenfunktionen als kom- mutativer Ring. Die Isomorphie zum Ring der analytischen Funktionen der komplexen Ebene	29
4. Ein Satz über mittelbare Funktionen	33
5. Die Cauchyschen Integralförmeln	35

V Untersuchung des Definitionsbereichs der analytischen Matrizenfunktion

1. Matrixnormen	38
2. Ein Hilfssatz über die Eigenwerte einer kon- vergenten Folge von Matrizen	41
3. Eigenschaften des Definitionsbereichs	44

VI Die gleichmäßige Konvergenz der Reihenentwick- lung nach Faber - Polynomen

1. Ein Hilfssatz über die Norm der Werte einer analytischen Matrizenfunktion	52
2. Der Satz über die gleichmäßige Konvergenz	54
3. Die Komponenten der analytischen Matrizenfunk- tion als analytische Funktionen in mehreren Veränderlichen	55

VII Die Taylor - Entwicklung der analytischen Matrizen- funktion

- | | |
|---|----|
| 1. Differenzierbarkeit und Taylor - Entwicklung | 57 |
| 2. Die Integraldarstellung der Ableitungen | 58 |
| 3. Die Taylor - Entwicklung für kommutative
Matrizen | 62 |
| 4. Die Vollständigkeit des Potenzreihensatzes
von Weyr | 65 |
| 5. Die Berechnung der Koeffizienten der Taylor -
Entwicklung | 75 |

VIII Die Matrizenintegration $\int_{\Gamma} F(z) dz$

- | | |
|--|-----|
| 1. Definition | 80 |
| 2. Eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integral-
satzes | 81 |
| 3. Die Cauchyschen Integralformeln in der Dar-
stellung der Matrizenintegration | 86 |
| 4. Andere Integralformeln | 87 |
| 5. Das Maximumprinzip | 94 |
| 6. Das Schwarzsche Lemma | 102 |

IX Zur Wertannahme analytischer Matrizenfunktionen

- | | |
|---|-----|
| 1. Über die Existenz von Lösungen der Gleichung
$F(X) = Y$ | 106 |
|---|-----|

2. Die Umkehrung der analytischen Matrizenfunktion	109
3. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Liouville	111
4. Eine Verallgemeinerung des Identitätssatzes	113
X Literaturverzeichnis	116

I E I N L E I T U N G

1. Problemstellung der vorliegenden Arbeit

Die Polynome und gebrochen rationalen Matrizenfunktionen sind aus den ihnen entsprechenden analytischen Funktionen der komplexen Ebene dadurch entstanden, daß man in den letzteren die komplexe Variable durch die Matrizenvariable und die Rechenoperationen für komplexe Zahlen durch die für Matrizen ersetzt hat. Die Erweiterung des Funktionsbegriffs über die gebrochen rationalen Funktionen hinaus ließ sich allerdings nicht mehr in so einfacher Weise bewerkstelligen (s.II/1). Man mußte vom Herkömmlichen abweichen und eine völlig andersartige Definition entwickeln. Dies erklärt, warum die Definitionen der Matrizenfunktion - es gibt mehrere äquivalente bzw. fast - äquivalente - ohne Kenntnis des Motivs, das zu ihrer Konstruktion geführt hat, auf den ersten Blick als unnötig kompliziert erscheinen. Eine eingehende Betrachtung - in der vorliegenden Arbeit für die Definition der Matrizenfunktion nach Sylvester/Buchheim (1883/1886) ausgeführt - zeigt jedoch, daß sich, wenn man eine hinreichend umfangreiche Klasse von Funktionen erhalten will, ein gewisses Maß an Kompliziertheit nicht vermeiden läßt (s.II/2).

Bei der Untersuchung der analytischen Funktion der komplexen Ebene wird in hohem Maße von der Möglichkeit der Potenzreihenentwicklung Gebrauch gemacht. Da die analytische Matrizenfunktion mit jener per Definition in Beziehung steht (s.II/2), er-

scheint es gerechtfertigt, nach der Potenzreihenentwicklung der Matrizenfunktion zu fragen.

In diesem Zusammenhang ist eine Arbeit von Weyr bedeutsam. Weyr hat 1887 die Konvergenz von Matrizenpotenzreihen mit komplexen Koeffizienten untersucht. Ersetzt man in der Potenzreihenentwicklung einer analytischen Funktion die komplexe durch die Matrizenvariable, dann konvergiert die auf diese Weise gewonnene Matrizenpotenzreihe für Matrizen, deren Eigenwerte sämtlich im Konvergenzkreis der Reihe liegen, sie divergiert, wenn nur ein Eigenwert außerhalb liegt.

Der Satz von Weyr ist als Satz über Matrizenpotenzreihen mit komplexen Koeffizienten vollständig^[1]. Im Hinblick auf die Potenzreihenentwicklung analytischer Matrizenfunktionen ist er jedoch unvollständig; denn er liefert nur eine Information über die Reihenentwicklung um skalare Matrizen. Die Konvergenzaussage des Satzes besagt nämlich, daß jede Skalarmatrix^[2] des Definitionsbereiches einer analytischen Matrizenfunktion Entwicklungsstelle einer Matrizenpotenzreihe mit komplexen Koeffizienten ist. Über die Entwicklung um eine nicht - skalare Matrix wird nichts ausgesagt.

Hieraus ergeben sich die folgenden, in der vorliegenden Arbeit behandelten Fragestellungen:

1. Kann man eine analytische Matrizenfunktion auch um nicht - skalare Matrizen in Potenzreihe entwickeln oder sind die

[1] Hensel hat 1926 ergänzend den Fall untersucht, daß Eigenwerte einer Matrix auf der Peripherie des Konvergenzkreises liegen.

[2] d.h. eine Matrix der Form aE ($a \in \mathbb{C}$, E : Einheitsmatrix)

von Weyr betrachteten Matrizenreihen die einzigen Potenzreihen?

2. Falls eine Potenzreihenentwicklung um nicht - skalare Matrizen möglich ist, sind dann die Reihenentwicklungen ein geeignetes Hilfsmittel zur Untersuchung der Matrizenfunktion?
3. Falls aber der Satz von Weyr als Satz über Potenzreihen vollständig ist, existiert dann eine andere tragfähigere Reihenentwicklung? Wenn ja, eignet sie sich zur Untersuchung der analytischen Matrizenfunktion?

2. Übersicht über die Ergebnisse

Die Frage nach der Potenzreihenentwicklung um nicht - skalare Matrizen wurde zunächst am Fall der durch $F(X) = X^{-1}$ (X regulär) gegebenen Inversen untersucht. Es zeigte sich, daß die einzigen Potenzreihendarstellungen dieser Funktion die bereits bekannten Weyrschen Matrizenreihen sind. Die nun naheliegende Vermutung, die skalaren Matrizen des Definitionsbereiches einer analytischen Matrizenfunktion seien die einzigen Entwicklungsstellen für Potenzreihen, konnte bestätigt werden (s.VII/4)^[1]. Damit war zugleich klar, daß die Matrizenpotenzreihen für die Untersuchung der Matrizenfunktion nicht den Stellenwert besitzen, den die skalaren Potenzreihen in Bezug auf die analytischen

[1]

Die Untersuchung der Inversen wurde in die vorliegende Arbeit nicht aufgenommen, da das Resultat ein Spezialfall des in VII/4 bewiesenen Satzes ist.

Funktionen der komplexen Ebene einnehmen.

Neben den Potenzreihen gibt es für die analytischen Funktionen aber auch andere Reihenentwicklungen. So hat Faber 1903 bewiesen, daß man eine in einem einfach zusammenhängenden, beschränkten Gebiet analytische Funktion f dort nach Polynomen entwickeln kann. Diese polynomische Entwicklung läßt sich ohne Einschränkung auf analytische Matrizenfunktionen übertragen:

Liegen die Eigenwerte der Matrix X in einem einfach zusammenhängenden, beschränkten Teilgebiet G' des Regularitätsgebietes G von f und hat die Funktion in G' die Faberentwicklung

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(z), \text{ dann gilt für den Funktionswert } F(X) \text{ der}$$

mit f korrespondierenden analytischen Matrizenfunktion F :

$$F(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(X) \quad (\text{s.III/2}).$$

Sei B eine Teilmenge von G , $\mathcal{V}(B)$ die Menge der Matrizen aus $\mathbb{C}^{n \times n}$, deren Eigenwerte sämtlich in B liegen. Dann gelten folgende Beziehungen:

Ist B offen (abgeschlossen, zusammenhängend), dann ist auch $\mathcal{V}(B)$ offen (abgeschlossen, zusammenhängend). - Liegen die Eigenwerte der Matrix X in $\bar{B}$, dann gilt $X \in \partial \mathcal{V}(B)$ genau dann, wenn wenigstens ein Eigenwert von X zu ∂B gehört (s.V/3).

$\mathcal{V}(G)$ ist also Gebiet. Für $n \geq 2$ läßt sich sogar zeigen: Unabhängig davon, ob G einfach oder mehrfach zusammenhängend ist, ist $\mathcal{V}(G)$ stets einfach zusammenhängend (s.V/3).

Die Eigenschaft "beschränkt" läßt sich nicht übertragen: $\mathcal{V}(B)$ ist für $B \neq \emptyset$ immer unbeschränkt (s.V/3).

Die Entwicklung nach Faber - Polynomen ist eine für analytische Matrizenfunktionen geeignete Reihendarstellung. Dies äußert sich zunächst darin, daß sich die bereits bekannten elementaren Sätze über die Funktion mit Hilfe der polynomischen Entwicklung ohne Schwierigkeit beweisen lassen; teilweise wird sogar eine Vereinfachung der Beweisführung erreicht (s.IV).

Weiterhin läßt sich zeigen, daß die Entwicklung nach Faber - Polynomen unter recht allgemeinen Voraussetzungen gleichmäßig konvergiert (s.VI/2). Daraus folgt, daß die Komponenten $F_{\nu\mu}$ von $F = \|F_{\nu\mu}\|$ analytische Funktionen in den n^2 Komponenten des Definitionsgebietes $\mathcal{V}(G)$ sind (s.VI/3). Hieraus wiederum ergibt sich die Möglichkeit, F um jede Matrix von $\mathcal{V}(G)$ in eine Taylorreihe zu entwickeln (s.VII/1). Die in dieser Reihe auftretenden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_{jk}} = \left\| \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_{jk}} \right\|_{\nu\mu}$, $j, k = 1, \dots, n$, lassen sich durch Integrale über Matrizen ausdrücken (s.VII/2). Die Berechnung der Integrale kann auf die Integration meromorpher Funktionen längs geschlossener Jordankurven zurückgeführt werden (s.VII/5).

Führt man analog zum komplexen Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ ein Matrizenintegral $\int_{\Gamma} F(z) dZ$ ein - Γ sei eine Matrixkurve (s.VIII/1), so läßt sich zeigen, daß der Cauchysche Integralsatz gilt, wenn Γ ein verallg. Kreis eines in $\mathcal{V}(G)$ gelegenen Polyzylinders ist (s.VIII/2). Unter gewissen Einschränkungen für Γ lassen sich auch die Cauchyschen Integralformeln für die analytische Funktion einer Veränderlichen auf die korrespondierende Matrizenfunktion

ausdehnen, und zwar in zwei Formulierungen (s.VIII/3 in Verbindung mit IV/5; s.VIII/4). Die Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel für die analytische Funktion mehrerer Veränderlicher führt auf eine Integralformel, die als eine Verallgemeinerung des Gaußschen Mittelwertsatzes angesehen werden kann (s.VIII/4). Mit ihrer Hilfe läßt sich zeigen, daß bezüglich einer beliebigen festen Matrixnorm das Maximumprinzip gilt (s.VIII/5). Die Gültigkeit des Schwarzschen Lemmas hängt ebenfalls nicht von der speziellen Wahl der Norm ab (s.VIII/6).

Bezeichnet wie oben G das Regularitätsgebiet der analytischen Funktion f und ist F die korrespondierende analytische Matrizenfunktion, so gilt für die Wertebereiche $f[G]$, $F[\mathcal{V}(G)]$ i. a. $F[\mathcal{V}(G)] \subset \mathcal{V}(f[G])$. Verschwindet f nirgends, dann gilt sogar die Gleichheit (s.IX/1).

Gilt für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ von $X \in \mathcal{V}(G)$ $f(\lambda_\nu) \neq f(\lambda_\mu)$ für $\nu \neq \mu$ und $f'(\lambda_j) \neq 0$ für $j = 1, \dots, s$, dann ist F in einer Umgebung von X umkehrbar (s.IX/2). Ist f eine schlichte Funktion, dann auch F (s.IX/2).

Ist f eine ganze Funktion und wenigstens eine Komponente der Korrespondierenden $F = \|F_{jk}\|$ beschränkt, dann ist F eine Konstante (s.IX/3).

Sind $\bar{F}_1 = \|{}^1F_{jk}\|$, $\bar{F}_2 = \|{}^2F_{jk}\|$ die Korrespondierenden der im Gebiet G analytischen Funktionen f_1, f_2 , und stimmen F_1 und F_2 in einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}(G)$ für eine Komponente überein: ${}^1F_{jk}(X) = {}^2F_{jk}(X)$, $X \in \mathcal{U}$, dann gilt im Fall $\nu = \mu$: $F_1 = F_2$ und im Fall $\nu \neq \mu$: $F_1 = F_2 + cE$, $c \in \mathbb{C}$ (s.IX/4).

II DIE ENTWICKLUNG DES BEGRIFFS DER ANALYTISCHEN MATRIZENFUNK- TION

1. Einführung der Matrizenfunktion über Polynome und Potenz- reihen. Der Satz von Weyr

Will man in Analogie zu den reellen oder komplexwertigen Funktionen eine Matrizenfunktion definieren, dann liegt es nahe, mit dem Polynom zu beginnen.

Man definiert für die n -reihige Matrix $X = \parallel x_{jk} \parallel_{j,k=1}^n$,^[1]
($j, k = 1, \dots, n$) das Polynom P durch

$$P(X) = a_0 E + a_1 X + \dots + a_m X^m, \quad X \in \mathbb{C}^{n^2},$$

wobei E die Einheitsmatrix ist und $a_\nu \in \mathbb{C}$ ($\nu = 1, \dots, m$) gilt.

Als nächstes kann man nun die Matrizenpotenzreihe R durch

$$R(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

$a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) einführen.

$R(X) = \parallel r_{jk} \parallel$ mit $r_{jk} = r_{jk}(x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{nn})$ ist definiert,

wenn die Reihen für die Komponenten r_{jk} , $j, k = 1, \dots, n$, konvergieren.

Peano, Weyr und Metzler haben sich als erste mit Potenzreihen befaßt. Peano^[2] zeigte die Konvergenz der Exponentialreihe und benutzte sie zur Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Metzler^[3] betrachtete

[1] In der vorliegenden Arbeit sind alle Matrizen n -reihig, wenn nicht ein in Klammern gesetzter Index eine andere Ordnung anzeigt.

[2] Peano: Intégration... (1888)

[3] Metzler: On the Roots... (1892)

neben e^X die Reihen $\ln X$, $\sin X$, $\arcsin X$ und bewies
 $e^{\ln X} = X$, $\sin(\arcsin X) = X$.

Weyr^[1] konnte zeigen, daß die Matrizenpotenzreihe

$$R(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

konvergiert, wenn die Eigenwerte von X sämtlich im Konvergenzkreis

$|z| < r$ ($z \in \mathbb{C}$) der korrespondierenden skalaren Reihe,

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

liegen, und daß sie divergiert, wenn sich wenigstens ein Eigenwert von X in $|z| > r$ befindet.

Der Satz von Weyr - hier für die Entwicklung um den Nullpunkt formuliert - gilt natürlich in entsprechender Formulierung für eine beliebige Entwicklungsstelle mE ($m \in \mathbb{C}$). Er legt die folgende (vorläufige) Definition der Matrizenfunktion nahe:

Sei f eine in einem Gebiet G der komplexen Ebene gegebene (eindeutige) analytische Funktion. X sei eine n -reihige Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in einer Kreisscheibe $K(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ mit $K(z_0, r) \subset G$ liegen. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ die Reihenentwicklung von f in $K(z_0, r)$, dann definiert man die Matrizenfunktion F für das Argument X durch

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (X - z_0 E)^k,$$

Der auf dem Satz von Weyr basierende Funktionsbegriff erweist sich jedoch als zu eng. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Betrachtet man die durch $l(z) = z^{-1}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) gegebene analytische Funktion l , so wäre zu erwarten, daß die korrespon-

[1] Weyr: Note... (1887)

dierende Matrizenfunktion L für jede reguläre Matrix X definiert ist und mit deren Inverser X^{-1} übereinstimmt.

Das trifft auch tatsächlich für solche Matrizen zu, deren Eigenwerte sich in einer in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gelegenen Kreisscheibe befinden. Nun gibt es aber reguläre Matrizen, welche diese Eigenwert - Bedingung nicht erfüllen, etwa die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Inverse dieser Matrix existiert, gehört aber nicht zum Wertebereich von L .

Die Erweiterung des Begriffs der Matrizenfunktion kann nach Ferrar^[1] wie folgt erreicht werden:

Sei F eine Matrizenfunktion im Sinne der auf S.8 gegebenen vorläufigen Definition; die korrespondierende analytische Funktion der komplexen Ebene sei f . X sei eine Matrix aus dem Definitionsbereich von F , J sei die (obere) Jordansche Normalform von X , T sei eine reguläre Matrix mit $X = T^{-1} J T$.

Dann gilt, wie Ferrar zeigen konnte:

$$F(X) = T^{-1} F(J) T .$$

Ferrar bewies ferner, daß für

[1] Ferrar: Finite Matrices (1951)

$$J = \left\| \begin{array}{ccc} J_1 & & \bigcirc \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ \bigcirc & & J_u \end{array} \right\| \quad \text{mit} \quad J_p = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_p & 1 & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_p \end{array} \right\|_{(\mu_p)} \quad 1 \leq p \leq u$$

gilt:

$$F(J) = \left\| \begin{array}{ccc} F(J_1) & & \bigcirc \\ & F(J_2) & \\ & & \ddots \\ \bigcirc & & F(J_u) \end{array} \right\|, \quad \text{wobei}$$

$$F(J_p) = \left\| \begin{array}{cccc} f(\lambda_p) & f'(\lambda_p) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_p) & \frac{1}{(\mu_p-1)!} f^{(\mu_p-1)}(\lambda_p) \\ & f(\lambda_p) & f'(\lambda_p) & \\ & & f(\lambda_p) & \\ & & & \ddots \\ \bigcirc & & & \frac{1}{2!} f''(\lambda_p) \\ & & & f'(\lambda_p) \\ & & & f(\lambda_p) \end{array} \right\|_{(\mu_p)},$$

$$1 \leq p \leq u.$$

Mit Rücksicht auf die eben dargestellten Sätze hat nun Ferrar den Begriff der Matrizenfunktion wie folgt erweitert:

Sei f eine in einem Gebiet G der komplexen Ebene gegebene (eindeutige) analytische Funktion, X eine Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in G liegen. J sei die Jordansche Normalform von X und T eine reguläre Matrix mit $X = T^{-1} J T$.

Die analytische Matrizenfunktion F wird dann für das Argument X durch

$$F(X) = T^{-1} F(J) T$$

definiert, wobei $F(J)$ die auf S.10 angegebene Matrix ist.

Insbesondere gilt: Liegen die Eigenwerte von X nicht in G schlechthin, sondern in einer in G gelegenen Kreisscheibe, dann kann $F(X)$ durch eine Potenzreihe dargestellt werden.

Im Hintergrund der von Ferrar vorgeschlagenen Erweiterung des Funktionsbegriffs steht eine Arbeit von Giorgi^[1]. Giorgi hatte bereits 1928 empfohlen, die Matrizenfunktion in der angegebenen Weise über die Jordansche Normalform zu definieren. Ferrar hat also den Zusammenhang zwischen Giorgis Definition und dem auf dem Satz von Weyr basierenden Funktionsbegriff hergestellt.

[2] Cipolla hat den Begriff der Matrizenfunktion nochmals erweitert. Um der Matrix X dem Funktionswert $F(X)$ zuzuordnen, geht er zunächst wie Giorgi vor: Er bringt X durch Ähnlichkeitstransformation auf die Jordansche Normalform J , $X = T^{-1} J T$, und definiert $F(X) = T^{-1} F(J) T$. Bei der Festlegung von $F(J)$ berücksichtigt er

[1] Giorgi: Nuove osservazione ...(1928)

[2] Cipolla: Sulle matrici ...(1932)

aber, daß f eine mehrdeutige analytische Funktion sein kann.

Im Unterschied zu Giorgi, der sich bei der Festlegung von $f(\lambda_p)$, $1 \leq p \leq u$, auf einen Zweig der Funktion beschränkt, läßt Cipolla für jeden der Jordanblöcke J_p , $1 \leq p \leq u$, einen anderen Zweig zu^[1].

Man gelangt auf diese Weise zur mehrdeutigen analytischen Matrizenfunktion.

2. Die Definition der Matrizenfunktion von Sylvester und Buchheim

Die Ausführungen des vorigen Abschnitts zeigen, daß der Aufbau des Begriffs der Matrizenfunktion über Polynome und Potenzreihen nicht so natürlich ist, wie es zunächst den Anschein hat. Das Wissen darum erleichtert das Verständnis der auf Sylvester und Buchheim zurückgehenden Definition. Diese kann wie folgt motiviert werden^[2]:

Man geht wiederum vom Polynom p mit

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m, \quad z \in \mathbb{C},$$

und dem mit p korrespondierenden Matrizenpolynom P mit

$$P(X) = a_0 E + a_1 X + \dots + a_m X^m, \quad X \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

aus.

Sei nun X_0 eine Matrix, deren Eigenwerte $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}$ paarweise verschieden sind. $P(X_0)$ hat dann die Eigenwerte $p(\lambda_1^{(0)}), \dots, p(\lambda_n^{(0)})$ ^[3].

[1] Bezeichnung wie auf S.10

[2] Sylvester und Buchheim haben lediglich die Definition notiert.
Sylvester: On the equation ... (1883)
Buchheim: An extension ... (1886)

[3] siehe z.B. Zurmühl: Matrizen

1 sei das Lagrangesche Interpolationspolynom, das in den Stützstellen $\lambda_1^{(v)}, \dots, \lambda_n^{(v)}$ die Werte $p(\lambda_1^{(v)}), \dots, p(\lambda_n^{(v)})$ annimmt.

1 ist durch

$$i(z) = \sum_{j=1}^n \frac{(z - \lambda_1^{(v)}) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_{j-1}^{(v)}) \cdot (z - \lambda_{j+1}^{(v)}) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n^{(v)})}{(\lambda_j^{(v)} - \lambda_1^{(v)}) \cdot \dots \cdot (\lambda_j^{(v)} - \lambda_{j-1}^{(v)}) \cdot (\lambda_j^{(v)} - \lambda_{j+1}^{(v)}) \cdot \dots \cdot (\lambda_j^{(v)} - \lambda_n^{(v)})} p(\lambda_j^{(v)}), z \in \mathbb{C},$$

gegeben.

Sei δ das charakteristische Polynom von X_0 ,

$$\delta(z) = (z - \lambda_1^{(v)}) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n^{(v)}), \quad z \in \mathbb{C},$$

Dann existiert - wie man zeigen kann - ein Polynom s :

$$s(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_r z^r, \quad z \in \mathbb{C},$$

so daß gilt:

$$p(z) = \delta(z) s(z) + i(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Setzt man nun

$$J(X_0) = \sum_{j=1}^n \frac{(X_0 - \lambda_1^{(v)} E) \cdot \dots \cdot (X_0 - \lambda_{j-1}^{(v)} E) \cdot (X_0 - \lambda_{j+1}^{(v)} E) \cdot \dots \cdot (X_0 - \lambda_n^{(v)} E)}{(\lambda_j^{(v)} - \lambda_1^{(v)}) \cdot \dots \cdot (\lambda_j^{(v)} - \lambda_{j-1}^{(v)}) \cdot (\lambda_j^{(v)} - \lambda_{j+1}^{(v)}) \cdot \dots \cdot (\lambda_j^{(v)} - \lambda_n^{(v)})} p(\lambda_j^{(v)}),$$

$$S(X_0) = b_0 E + b_1 X_0 + \dots + b_r X_0^r,$$

$$\Delta(X_0) = (X_0 - \lambda_1^{(v)} E) \cdot \dots \cdot (X_0 - \lambda_n^{(v)} E),$$

so folgt

$$P(X_0) = \Delta(X_0) S(X_0) + J(X_0),$$

$$P(X_0) = J(X_0).$$

Diese Beziehung hat Buchheim für Matrizen, deren Eigenwerte nicht paarweise verschieden sind, verallgemeinert:

Ist X_1 eine Matrix, deren paarweise verschiedenen Eigenwerte

$\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_s^{(1)}$ im Minimalpolynom φ mit den Vielfachheiten

$\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_s^{(1)}$ auftreten und bezeichnet i jetzt das Hermitesche

Interpolationspolynom, das in den Stützstellen $\lambda_\nu^{(1)}$ ($\nu = 1, \dots, s$)

den Bedingungen

$$\left. \frac{d^{\sigma} i(z)}{dz^{\sigma}} \right|_{z=\lambda_j^{(\mu)}} = \left. \frac{d^{\sigma} p(z)}{dz^{\sigma}} \right|_{z=\lambda_j^{(\mu)}} \quad \sigma=1, \dots, \mu_j^{(\mu)}-1$$

genügt, dann gilt ebenfalls

$$p(x_1) = j(x_1) .$$

Auf Grund dieser Beziehung kann man den Funktionswert des Matrizenpolynoms P für das Argument X durch ein (i.a. Hermitesches) Interpolationspolynom ausdrücken, und zwar wie folgt:

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von X mit den Vielfachheiten $\mu_1, \dots, \mu_s$ im Minimalpolynom ψ ,

$$\psi(z) = (z-\lambda_1)^{\mu_1} \dots (z-\lambda_s)^{\mu_s}; \quad z \in \mathbb{C},$$

sind die Polynome ψ_j ($j=1, \dots, s$) durch

$$\psi_j(z) = \frac{\psi(z)}{(z-\lambda_j)^{\mu_j}}; \quad z \in \mathbb{C}.$$

und die Zahlen $\beta_{j\nu}$ ($j=1, \dots, s$; $\nu=1, \dots, \mu_j$) durch

$$\beta_{j\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!} \left. \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} \left[\frac{p(z)}{\psi_j(z)} \right] \right|_{z=\lambda_j}$$

definiert, dann gilt

$$P(X) = \sum_{j=1}^s \left[\beta_{j1} E + \beta_{j2} (X-\lambda_j E) + \dots + \beta_{j\mu_j} (X-\lambda_j E)^{\mu_j-1} \right] \psi_j(X).$$

Der Nutzen dieser komplizierten Darstellung von $P(X)$ liegt im Definitorischen; mit ihrer Hilfe kann man zu jeder (eindeutigen) analytischen Funktion der komplexen Ebene eine Matrizenfunktion definieren:

Ist f eine in einem Gebiet G der komplexen Ebene gegebene (eindeutige) analytische Funktion, X eine Matrix, deren paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ im Minimalpolynom Ψ mit den Vielfachheiten $\mu_1, \dots, \mu_s$ auftreten, und gilt $\lambda_j \in G$ ($j = 1, \dots, s$), dann wird die mit f korrespondierende Matrizenfunktion F für das Argument X durch

$$F(X) = \sum_{j=1}^s [\alpha_{j1} E + \alpha_{j2} (X - \lambda_j E) + \dots + \alpha_{j\mu_j} (X - \lambda_j E)^{\mu_j-1}] \Psi_j(X)$$

definiert. Dabei ~~ist~~

$$\alpha_{j\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} \left[\frac{f(z)}{\Psi_j(z)} \right]_{z=\lambda_j}, \quad \begin{matrix} j=1, \dots, s \\ \nu=1, \dots, \mu_j \end{matrix}$$

$$\Psi_j(X) = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (X - \lambda_{j-1})^{\mu_{j-1}} \cdot (X - \lambda_{j+1})^{\mu_{j+1}} \dots (X - \lambda_s)^{\mu_s},$$

$$j=1, \dots, s.$$

Den folgenden Kapiteln wird diese, auf Sylvester/Buchheim zurückgehende Definition der Matrizenfunktion zugrunde gelegt. Da f nach Voraussetzung analytisch ist, wird die Korrespondierende F als analytische Matrizenfunktion bezeichnet.

Der Zusatz "analytisch" ist zunächst rein formal und dient der Abgrenzung gegen Matrizenfunktionen, die mittels einer reellen, hinreichend oft differenzierbaren, aber nicht in Potenzreihe entwickelbaren Funktion erzeugt werden können.

Später wird sich zeigen, daß F auch inhaltlich analytisch ist, nämlich in dem Sinn, daß jede Komponente F_{jk} von $\bar{F} = \|F_{jk}\|$ analytisch in den n^2 Elementen der Argumentmatrizen ist.

Neben Sylvester/Buchheim , Weyr/Ferrar/Giorgi und Cipolla haben Dirac^[1] , Fantappiè^[2] , Schwerdtfeger^[3] und Richter^[4] Definitionen für Matrizenfunktionen angeboten. Rinehart^[5] hat die Äquivalenz der Definitionen untersucht.

-
- [1] Dirac: On Quantum Algebra ...(1926)
[2] Fantappiè: Analyse Algebrique ...(1928)
[3] Schwerdtfeger: Les Fonctions ...(1938)
[4] Richter: Über Matrizenfunktionen ...(1950)
[5] Rinehart: The Equivalence ...(1955)

III REIHENENTWICKLUNGEN VON MATRIZENFUNKTIONEN

1. Betrachtungen zur Vollständigkeit des Satzes von Weyr

Nach dem Satz von Weyr konvergiert die Matrizenpotenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (X - z_0 E)^m, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

wenn die Eigenwerte von X im Konvergenzkreis $|z - z_0| < r$ der skalaren Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

liegen; sie divergiert, wenn sich wenigstens ein Eigenwert in $|z - z_0| > r$ befindet [1].

Hensel [2] hat den Satz vervollständigt: Konvergenz liegt auch dann vor, wenn von den n Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von X nur n_1 ($n_1 < n$) in $|z - z_0| < r$ liegen und die übrigen $n - n_1$ Werte zu den Punkten auf $|z - z_0| = r$ gehören, in denen die skalare Reihe analytisch fortgesetzt werden kann.

Eine analytische Funktion f der komplexen Ebene läßt sich um jeden Punkt ihres Regularitätsgebietes G in eine Potenzreihe entwickeln. Da die korrespondierende analytische Matrizenfunktion F mit f per Definition in Beziehung steht, ist es gerechtfertigt, nach den Potenzreihendarstellungen von F zu fragen.

[1] s. Seite 8

[2] Hensel: Über Potenzreihen ... (1926)

Kann F in jedem Punkt seines Definitionsbereiches ^[1] in Potenzreihe entwickelt werden?

Der Satz von Weyr besagt, daß F in den skalaren Matrizen, zE ($z \in G$), nach Potenzen entwickelt werden kann. Die Koeffizienten dieser Reihen sind Skalare. - Läßt sich F aber auch um eine nicht - skalare Matrix in Potenzreihe entwickeln? Etwa dann, wenn man sich von der Einschränkung auf skalare Koeffizienten befreit und mit Rücksicht auf die Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation beidseitig Matrizen als Koeffizienten zuläßt?

Leider ist die Verallgemeinerung des Satzes von Weyr in dieser Richtung nicht durchführbar. Man kann zeigen, daß F außer den auf dem Satz von Weyr basierenden Entwicklungen keine weiteren Potenzreihendarstellungen besitzt ^[2].

2. Die Entwicklung der analytischen Matrizenfunktion nach Faber - Polynomen

Da Potenzreihen für die analytische Matrizenfunktion offenbar nicht die angemessene Darstellungsform sind, ist die Suche nach anderen Reihenentwicklungen gerechtfertigt.

Die Frage nach Reihenentwicklungen für Matrizenfunktionen ist nicht nur von theoretischem, sondern auch von praktischem Interesse. Man denke an die Berechnung eines Funktionswertes $F(X)$ für

[1] In V/3 wird gezeigt, daß der Definitionsbereich ein Gebiet des $\mathbb{C}^{n^2}$ ist.

[2] Beweis: siehe VII/4

eine gegebene Matrix X . Um $F(X)$ zu berechnen, muß man i.a.

• auf welche der Definitionen von F man auch immer zurückgreift - wenigstens die Eigenwerte von X und deren Vielfachheiten kennen, das bedeutet, man muß für X die Eigenwertaufgabe lösen. Es leuchtet ein, daß die Bestimmung von $F(X)$ auf diesem Wege nur in speziellen Fällen praktikabel ist. Hat man hingegen eine Reihenentwicklung zur Verfügung, so kann man $F(X)$ durch eine Partialsumme der Reihe approximieren.

Für die Reihenentwicklung von Matrizenfunktionen ist folgender Satz von Bedeutung^[1] :

Ist X eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ aus einem Gebiet G ($G \subset \mathbb{C}$), in dem eine Folge $((f_m))$ analytischer Funktionen gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert, dann konvergiert die Matrizenfolge $((F_m(X)))$ gegen $F(X)$. Dabei ist F_m bzw. F die mit f_m bzw. f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Der Satz beinhaltet die Möglichkeit, $F(X)$ über die eventuell vorhandene Entwicklung nach Potenzen hinaus durch andere Reihen darzustellen; er verallgemeinert den Satz von Weyr.

Welche andere Reihenentwicklung könnte für die Darstellung der analytischen Matrizenfunktion von Interesse sein?

Um diese Frage zu beantworten, führe man sich nochmals den Satz von Weyr vor Augen. Nach diesem Satz kann $F(X)$ nur dann durch eine Potenzreihe dargestellt werden, wenn die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von X sämtlich in einem zum Regularitätsgebiet G von f gehörenden

[1] Gantmacher: Matrizenrechnung - Der Satz enthält eine weitere Aussage, die aber im Rahmen der vorliegenden Fragestellung nicht von Interesse ist.

Konvergenzkreis liegen. Diese Eigenwertbedingung ist natürlich, wenn f nicht gerade eine ganze Funktion ist oder nur in einer offenen Kreisscheibe gegeben ist, i.a. nicht zu erfüllen.

Man kann aber zu gegebenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ stets ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Teilgebiet B von G mit $\lambda_\nu \in B$ ($\nu=1, \dots, n$) konstruieren. In einem solchen Gebiet kann nun - wie Faber^[1] zeigte - für f eine polynomische Entwicklung angegeben werden.

Der Satz von Faber^[2]:

Voraussetzungen:

Es sei B ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet von $\hat{\mathbb{C}}$ ^[3]. Dann ist $B^1 := C\bar{B}$ in $\hat{\mathbb{C}}$ ebenfalls einfach zusammenhängend.

B^1 werde durch die schlichte Funktion φ auf das Äußere des Kreises $|t| > \varrho$ ($\varrho > 0$) abgebildet, so daß $\varphi(\infty) = \infty$ gilt.

ψ sei die Umkehrfunktion von φ . Das Bild von $|t| = \tau$ ($\tau > \varrho$) unter ψ ist eine in B^1 gelegene geschlossene Jordankurve und werde mit L_τ bezeichnet; B_τ sei das Innengebiet von L_τ .

Sei f eine analytische Funktion mit Regularitätsgebiet G , und es gelte $\bar{B} \subset G$. Dann existiert ein maximales R mit $\varrho < R \leq \infty$ so daß für jedes r mit $\varrho < r < R$ gilt: $B_r \subset G$.

[1] Faber: Über polynomische Entwicklungen (1903)

[2] nach Smirnow/Lebedjew: Functions ...

[3] Die Voraussetzungen über B lassen sich noch etwas abschwächen (s. Smirnow/Lebedjew)

Behauptung:

Unter den Voraussetzungen kann f in B_R durch die Polynomreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(z)$$

dargestellt werden. p_m ist ein Polynom höchstens m -ten Grades; für die Koeffizienten gilt:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\tau} \frac{f(\psi(t))}{t^{m+1}} dt, \quad \varrho < \tau < R.$$

Die Reihe konvergiert auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von B_R gleichmäßig; sie divergiert im Äußeren von $\overline{B_R}$.

In Anlehnung an den von Gantmacher bewiesenen Satz^[1] läßt sich nun zeigen:

Satz 1

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

B sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Teilgebiet von G mit $\overline{B} \subset G$ und $\sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(z)$ sei die in B_R ^[2] gültige Entwicklung von f nach Faber-Polynomen bezüglich B .

Sei X eine Matrix, deren Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sämtlich im Konvergenzbereich der Faber-Reihe liegen.

Dann gilt:

$$F(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(X),$$

Dabei ist P_m das zu p_m korrespondierende Matrizenpolynom.^[3]

[1] s. Seite 19

[2] B_R habe die gleiche Bedeutung wie im Satz von Faber, s. S. 20

[3] Nach den Ausführungen von S. 12ff. erhält man $P_m(X)$, indem man in $p_m(z)$ z durch die Matrizenvariable X ersetzt.

Divergenz läge vor, wenn sich einer der Eigenwerte von X außerhalb des Konvergenzbereichs der Faber - Entwicklung befinden würde.

Beweis:

Seien o.B. d.A. $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ($s \leq n$) die paarweise verschiedenen Eigenwerte von X und $\mu_1, \dots, \mu_s$ deren Vielfachh, im Minimalpolynom ψ von X .

$$Q_N(X) := \sum_{m=0}^N a_m P_m(X).$$

$Q_N(X)$ hat auch die Darstellung

$$Q_N(X) = \sum_{j=1}^s [\alpha_{j1} E + \alpha_{j2} (X - \lambda_j E) + \dots + \alpha_{j\mu_j} (X - \lambda_j E)^{\mu_j-1}] \psi_j(X)$$

mit

$$\alpha_{jv} = \frac{1}{(v-1)!} \left[\frac{q_N(z)}{\psi_j(z)} \right]_{z=\lambda_j}^{(v-1)} \quad \begin{matrix} j=1, \dots, s \\ v=1, \dots, \mu_j \end{matrix}$$

$$q_N(z) = \sum_{m=0}^N a_m P_m(z)$$

Da die Folge $((q_N))$ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $B_R \cup \{\lambda_j \mid 1 \leq j \leq s\}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_{jv}(N) = \frac{1}{(v-1)!} \left[\frac{f(z)}{\psi_j(z)} \right]_{z=\lambda_j}^{(v-1)}$$

Daher folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(X) = F(X)$$

Da natürlich auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(X)$$

gilt, folgt

$$F(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(X)$$

Zur Aussage über die Divergenz:

Läge ein Eigenwert von X nicht im Konvergenzbereich der Faber -

Reihe, dann würde die Folge $((Q_N(X)))$ mit

$$Q_N(X) = \sum_{j=1}^s [\alpha_{j1} E_1 + \dots + \alpha_{j\mu_j} (X - \lambda_j E)^{\mu_j-1}] \Psi_j(X)$$

divergieren.

Folgerung aus Satz 1

Sei z_0 aus G und B das Innere eines in G gelegenen Kreises um z_0 .

Dann fällt die Entwicklung von f nach Faber - Polynomen bezüglich

B mit der Potenzreihenentwicklung von f um z_0 zusammen. Das bedeu-

tet: Der Satz von Weyr/Hensel ist ein Spezialfall von Satz 1.

I.V. ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN DER ANALYTISCHEN MATRIZENFUNKTIONEN

Im folgenden werden einige größtenteils bekannte Sätze über analytische Matrizenfunktionen dargestellt. Sie werden mit Hilfe des Satzes über die Entwicklung nach Faber - Polynomen (Satz 1) hergeleitet. Die Beweisführung mit Faber - Reihen ist nicht schwieriger als die herkömmliche; bei Satz 6 wird sogar eine Vereinfachung erzielt.

1. Der Satz über die Ähnlichkeitstransformation des Funktionswertes

Satz 2

Sei f im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytisch und F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

T sei eine reguläre Matrix.

X sei eine Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in G liegen.

Dann gilt:

$$T^{-1} F(X) T = F(T^{-1} X T)$$

Beweis:

Nach Satz 1 kann $F(X)$ durch eine Faber - Reihe dargestellt werden.

$$\text{Sei } F(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(X),$$

$$G_N(X) := \sum_{m=0}^N a_m P_m(X),$$

Wegen $T^{-1} X^k T = (T^{-1} X T)^k$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$T^{-1} Q_N(x) T = Q_N(T^{-1} X T),$$

mithin

$$\begin{aligned} T^{-1} F(x) T &= T^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(x) T = \lim_{N \rightarrow \infty} [T^{-1} Q_N(x) T] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(T^{-1} X T) = F(T^{-1} X T). \end{aligned}$$

Bemerkung:

Bezeichnet X' die Transponierte der Matrix X , so gilt:

$$F(X') = [F(X)]' \quad [1].$$

2. Die Funktionswerte für Diagonalmatrizen, insbesondere

Jordansche Normalformen

Satz 3

Sei f im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytisch und F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

D sei eine verallgemeinerte Diagonalmatrix,

$$D = \begin{vmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{vmatrix},$$

deren Eigenwerte sämtlich in G liegen. Dann gilt:

$$F(D) = \begin{vmatrix} F(D_1) & & & \\ & F(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F(D_n) \end{vmatrix}.$$

Beweis:

Nach Satz 1 kann $F(D)$ durch eine Faber - Reihe dargestellt werden:

$$\text{Sei } F(D) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(D) .$$

$$Q_N(D) := \sum_{m=0}^N a_m P_m(D) .$$

Auf Grund der Rechenregeln für Übermatrizen ^[1] gilt die Behauptung für Polynome, d.h., es gilt

$$Q_N(D) = \begin{vmatrix} Q_N(D_1) & & & \\ & Q_N(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & Q_N(D_u) \end{vmatrix} .$$

Durch den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ erhält man schließlich die Behauptung.

Satz 4

Sei f im Gebiet $\mathbb{G}$, $G \subset \mathbb{C}$, analytisch und F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

J sei eine Jordansche Normalform ,

$$J = \begin{vmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & J_u \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad J_p = \begin{vmatrix} \lambda_p & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ \circ & & & \lambda_p \end{vmatrix}_{(\mu_p)} \quad (1 \leq p \leq u)$$

Dann gilt:

$$F(J) = \begin{vmatrix} F(J_1) & & & \\ & F(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & F(J_u) \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad F(J_p) = \begin{vmatrix} f(\lambda_p) & f'(\lambda_p) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{f^{(\mu_p-1)}(\lambda_p)}{(\mu_p-1)!} & \\ \circ & & & f(\lambda_p) \end{vmatrix}_{(\mu_p)} .$$

[1] s. Gantmacher: Matrizenrechnung

Beweis:

Da J eine verallgemeinerte Diagonalmatrix ist, folgt aus Satz 3

$$F(J) = \begin{vmatrix} F(J_1) & & & \\ & F(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F(J_u) \end{vmatrix}$$

Zur Berechnung von $F(J_p)$ $p=1, \dots, u$:

Nach Satz 1 kann $F(J_p)$ durch eine Faber - Reihe dargestellt werden.

$$\text{Sei } F(J_p) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(J_p),$$

$$Q_N(J_p) := \sum_{m=0}^N a_m P_m(J_p),$$

Ordnet man $Q_N(J_p)$ nach Potenzen von J_p , so erhält man ein

Polynom von höchstens N -tem Grade:

$$\text{Sei } Q_N(J_p) = \sum_{m=0}^N b_m J_p^m.$$

Mit

$$H_p := \begin{vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{vmatrix}_{(\mu_p)}$$

gilt:

$$J_p^m = (\lambda_p E + H_p)^m$$

$$= \lambda_p^m E + \binom{m}{1} \lambda_p^{m-1} H_p + \binom{m}{2} \lambda_p^{m-2} H_p^2 + \dots + \binom{m}{\mu_p-1} \lambda_p^{m-(\mu_p-1)} H_p^{\mu_p-1}$$

$$= \begin{vmatrix} z^m|_{z=\lambda_p} & (z^m)'|_{z=\lambda_p} & \dots & \frac{1}{(\mu_p-1)!} (z^m)^{(\mu_p-1)}|_{z=\lambda_p} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & (z^m)'|_{z=\lambda_p} & \\ & & & z^m|_{z=\lambda_p} \end{vmatrix}_{(\mu_p)}$$

$$H_p^k = 0 \text{ für } k \geq \mu_p$$

Aus der Darstellung für J_p^m folgt:

$$Q_N(J_p) = \begin{vmatrix} q_N(\lambda_p) & q'_N(\lambda_p) & \dots & \frac{q_N^{(\mu_p-1)}(\lambda_p)}{(\mu_p-1)!} \\ & & & \\ & & & q'_N(\lambda_p) \\ & & & q_N(\lambda_p) \end{vmatrix}_{(\mu_p)} \quad 1 \leq p \leq u$$

mit $q_N(\lambda_p) = \sum_{m=0}^N a_m P_m(\lambda_p) = \sum_{m=0}^N b_{nm} \lambda_p^m$ usw.

Durch Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ erhält man schließlich die für $F(J_p)$ gewünschte Darstellung.

Folgerung aus Satz 4

Sei f im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytisch und F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

X sei eine Matrix, deren Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sämtlich in G liegen.

Dann hat $F(X)$ die Eigenwerte $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$.

Beweis:

Sei J die Jordansche Normalform von X und T eine reguläre Matrix mit $X = T^{-1} X T$.

Nach Satz 4 hat $F(J)$ die Eigenwerte $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$.

Nach Satz 2 sind diese auch Eigenwerte von $F(X)$.

3. Die analytischen Matrizenfunktionen als kommutativer Ring.

Die Isomorphie zum Ring der analytischen Funktionen der komplexen Ebene

f_1 und f_2 seien im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytisch, F_1 und F_2 die mit ihnen korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen.

X sei eine Matrix, deren sämtliche Eigenwerte in G liegen.

Die Summe $F_1 \oplus F_2$ wird durch

$$(F_1 \oplus F_2)(X) = F_1(X) + F_2(X)$$

das Produkt $F_1 \odot F_2$ durch

$$(F_1 \odot F_2)(X) = F_1(X) \cdot F_2(X)$$

definiert ^[1] .

Satz 5

Sei G , $G \subset \mathbb{C}$, Gebiet, $[f]_G$ die Menge der in G analytischen Funktionen, $[F]_G$ die Menge der mit den Funktionen von $[f]_G$ korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen.

Dann bildet $[F]_G$ mit den Verknüpfungen $\oplus, \odot$ einen kommutativen Ring. Einselement ist die Konstante E .

Beweis:

Seien f_1, f_2, f_3 aus $[f]_G$, F_1, F_2, F_3 die mit ihnen korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen.

1. Behauptung: Aus $f_1 + f_2 = f_3$ folgt $F_1 \oplus F_2 = F_3$.

Beweis:

Sei X eine Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in G liegen.

[1] "+" bzw. "." bedeuten Matrizenaddition bzw. -multiplikation.

J sei die Jordansche Normalform von X, T eine reguläre Matrix mit $X = T^{-1} J T$.

Dann folgt mit Rücksicht auf die Sätze 2 und 4:

$$\begin{aligned} (F_1 \odot F_2)(X) &= F_1(X) + F_2(X) = T^{-1} [F_1(J) + F_2(J)] T \\ &= T^{-1} F_3(J) T = F_3(X). \end{aligned}$$

2. Behauptung: Aus $f_1 \cdot f_2 = f_3$ folgt $F_1 \odot F_2 = F_3$

Beweis:

X, J und T wie oben

$$(F_1 \odot F_2)(X) = F_1(X) \cdot F_2(X) = T^{-1} [F_1(J) \cdot F_2(J)] T.$$

Sei

$$J = \left\| \begin{array}{ccc} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{array} \right\| \quad \text{mit} \quad J_p = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_p & 1 & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{array} \right\|_{(\mu_p)}, \quad 1 \leq p \leq u.$$

Mit Rücksicht auf Satz 4 folgt

$$F_1(J) \cdot F_2(J) = \left\| \begin{array}{ccc} F_1(J_1) \cdot F_2(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & F_1(J_u) \cdot F_2(J_u) \end{array} \right\|.$$

Die direkte Berechnung der Untermatrizen führt zu

$$F_1(J_p) \cdot F_2(J_p) = F_3(J_p), \quad 1 \leq p \leq u.$$

Daher gilt:

$$F_1(J) \cdot F_2(J) = F_3(J).$$

Setzt man das Resultat in die oben stehende Gleichungskette ein, so folgt

$$(F_1 \odot F_2)(X) = T^{-1} F_3(J) T = F_3(X).$$

3. Behauptung: Die Multiplikation $\odot$ ist kommutativ.

Nachweis analog zu Teil 2 des Beweises.

Man zeigt durch direkte Berechnung: $F_1(J_p) \cdot F_2(J_p) = F_2(J_p) \cdot F_1(J_p)$, $p=1, \dots, u$.

4. Aus Teil 2 des Beweises folgt ebenfalls, daß die konstante Matrix E Einselement ist.

5. Aus dem in (1) bis (4) Bewiesenen folgt im wesentlichen, daß $([F]_G, \oplus, \odot, E)$ ein kommutativer Ring ist, dessen Einselement die Einheitsmatrix ist.

1. Folgerung aus Satz 5

Die Abbildung $I : [f]_G \longrightarrow [F]_G$, die jedem $f \in [f]_G$ die korrespondierende analytische Matrizenfunktion F zuordnet, ist ein Ringisomorphismus.

2. Folgerung aus Satz 5

$f_1, \dots, f_l$ seien im Gebiet $G, G \subset \mathbb{C}$, analytisch. p sei ein Polynom in den komplexen Variablen $u_1, \dots, u_l$. Die analytische Funktion q sei in G durch

$$q(z) = p(t_k(z) \mid k=1, \dots, l), \quad z \in G;$$

gegeben. Dann ist S , definiert durch

$$S(X) = P(F_k(X) \mid k=1, \dots, l), \quad [1]$$

für jede Matrix X , deren Eigenwerte sämtlich in G liegen, eine

[1] $P(F_k(X) \mid k=1, \dots, l)$ entsteht aus $p(t_k(z) \mid k=1, \dots, l)$, indem man $t_k(z)$ durch $F_k(X)$ ersetzt.

analytische Matrizenfunktion (Satz 5) und es gilt:

Aus $q(z) = 0$ für alle $z \in G$ folgt $S(X) = 0$ für alle X , deren Eigenwerte in G liegen.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der 1. Folgerung zu

Satz 5.

Ist p ein Polynom,

$$p(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0, \quad z \in \mathbb{C},$$

dann hat die korrespondierende analytische Matrizenfunktion P per Definition die Darstellung von Sylvester/Buchheim^[1].

Da p ein Polynom ist, hat P aber auch die "konventionelle" Darstellung

$$P(X) = c_m X^m + c_{m-1} X^{m-1} + \dots + c_1 X + c_0 E, \quad X \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad [2]$$

Dieser Sachverhalt kann für gebrochen rationale Funktionen verallgemeinert werden:

3. Folgerung aus Satz 5

Seien p_1, p_2 Polynome,

$$p_1(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

$$p_2(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$G, G \subset \mathbb{C}$, sei Gebiet, und die gebrochen rationale Funktion q

$$\text{mit} \quad q(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)} \quad z \in G$$

sei dort analytisch.

[1] s. Seite 15

[2] s. Seite 12 ff.

X sei eine Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in G liegen.

Dann gilt für die mit q korrespondierende analytische Matrizenfunktion Q :

$$Q(X) = \frac{a_\ell X^\ell + a_{\ell-1} X^{\ell-1} + \dots + a_1 X + a_0 E}{b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0 E} .$$

Beweis:

Aus $P_2 \cdot q = P_1$ folgt wegen der 1. Folgerung aus Satz 5

$$(b_m X^m + \dots + b_0 E) Q(X) = a_\ell X^\ell + \dots + a_0 E .$$

Da P_2 regulär ist (Folgerung aus Satz 4), erhält man nach Division durch P_2 die Behauptung.

4. Ein Satz über mittelbare Funktionen

Satz 6

Seien f_1, f_3 analytisch im Gebiet $G, G \subset \mathbb{C}$, f_2 analytisch in $f_1[G]$; F_1, F_2, F_3 seien die korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen.

X sei eine Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in G liegen.

Dann folgt aus $f_3(z) = f_2(f_1(z))$ für $z \in G$

$$F_3(X) = F_2(F_1(X)) .$$

Beweis:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von X , $\mu_1, \dots, \mu_s$ deren Vielfachheiten im Minimalpolynom γ ;

B sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Teilgebiet des Regularitätsbereiches von f_2 mit $f_1(\lambda_\nu) \in B$ ($\nu=1, \dots, n$).

Die Entwicklung von f_2 nach Faber - Polynomen bezüglich B sei durch

$$f_2(w) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(w), \quad w \in B,$$

gegeben.

Es gilt

$$f_3(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(f_1(z)), \quad z \in f_1^{-1}[B] \cap G.$$

Sei $Q_N(z) = \sum_{m=0}^N a_m P_m(f_1(z)), \quad z \in f_1^{-1}[B] \cap G.$

Es gilt einerseits:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^s [\alpha_{j1} E + \alpha_{j2} (x - \lambda_j E) + \dots + \alpha_{j\mu_j} (x - \lambda_j E)^{\mu_j-1}] \psi_j(x) \right\}$$

$$\text{mit} \quad \alpha_{j\nu}(N) = \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{Q_N(z)}{\psi_j(z)} \right]^{(\nu-1)}_{z=\lambda_j} \quad j=1, \dots, s; \quad \nu=1, \dots, \mu_j$$

Da die Folge $((Q_N))$ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $f_1^{-1}[B] \cap G$ gleichmäßig konvergiert, und zwar gegen die Grenzfunktion f_3 , folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(x) = f_3(x).$$

Andererseits folgt wegen

$$Q_N(x) = \sum_{m=0}^N a_m P_m(f_1(x)) \quad (1. \text{ Folgerung aus Satz 5})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(f_1(x)) = f_2(f_1(x)).$$

Aus den beiden für

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(x)$$

gewonnenen Darstellungen folgt die Behauptung.

§2. Die Cauchyschen Integralformeln

Definition:

Sei $W(z) = \|w_{jk}(z)\|$ eine Matrix, deren Komponenten analytisch in der komplexen Variablen z sind. γ sei eine in $\mathbb{C}$ gelegene rektifizierbare Kurve, für die

$$\int_{\gamma} w_{jk}(z) dz \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

existiert. Dann sei

$$\int_{\gamma} W(z) dz = \left\| \int_{\gamma} w_{jk}(z) dz \right\|$$

Satz 7 Die Cauchyschen Integralformeln

f sei analytisch im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, und es seien F bzw. $F^{(k)}$ die zu f bzw. deren Ableitungen $f^{(k)}$ korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen ($k \in \mathbb{N}$).

γ sei eine geschlossene Jordankurve, die zusammen mit ihrem Innengebiet P_{γ} zu G gehört; X sei eine Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in P_{γ} liegen. Dann gilt:

$$F^{(k)}(X) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(zE - X)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis:

1. Die Komponenten von $(zE - X)^{-k-1}$ sind gebrochen rationale Funktionen in z . Sie haben auf γ keine Pole, da $zE - X$ für $z \in \gamma$ regulär ist. Also sind die Komponenten von $f(z) \cdot (zE - X)^{-k-1}$ auf γ analytisch. Mithin existiert das Integral.

2. Sei J die Jordansche Normalform von X und T eine reguläre Matrix mit $X = T^{-1} J T$.

Da $f(z) \cdot (zE - X)^{-k-1}$ für festes z als analytische Matrizenfunktion in der Variablen X aufgefaßt werden kann (3. Folgerung aus Satz 5), gilt nach Satz 2:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(zE - X)^{k+1}} dz = T^{-1} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(zE - J)^{k+1}} dz T.$$

Zu zeigen ist also:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(zE - J)^{k+1}} dz = F^{(k)}(J), \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

3. Seien $(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2}, \dots, (\lambda - \lambda_u)^{\mu_u}$

die Elementarteiler von J .

Da $(zE - J)^{-k-1}$ für festes z als analytische Matrizenfunktion in der Variablen J aufgefaßt werden kann und $zE - J$ für die feste Jordanmatrix J eine verallgemeinerte Diagonalmatrix ist, folgt nach Satz 3

$$(zE - J)^{-k-1} = \begin{vmatrix} (zE_{(\mu_1)} - J_1)^{-k-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (zE_{(\mu_u)} - J_u)^{-k-1} \end{vmatrix},$$

wobei wie üblich

$$J = \begin{vmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{vmatrix}, \quad J_p = \begin{vmatrix} \lambda_p & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_p \end{vmatrix}, \quad p=1, \dots, u,$$

gelten soll.

V. UNTERSUCHUNG DES DEFINITIONS -
BEREICHES DER ANALYTISCHEN
MATRIZENFUNKTION

Die in Kapitel IV dargestellten Sätze über die analytische Matrixfunktion konnten ohne nähere Kenntnis des Definitionsbereichs der Funktion formuliert und bewiesen werden. Es genügte zu wissen, daß die Funktion für Matrizen definiert ist, deren Eigenwerte im Regularitätsgebiet der korrespondierenden skalaren Funktion liegen. Die Aussagen in den Kapiteln VI bis IX lassen sich in der Regel ohne Kenntnis der Eigenschaften des Definitionsbereiches nicht beweisen, in manchen Fällen nicht einmal formulieren. Aus diesem Grund wird jetzt der Definitionsbereich der analytischen Matrixfunktion näher untersucht.

1. Matrixnormen

Seien A und B n-reihige Matrizen mit komplexen Elementen.

$N: \mathbb{C}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Matrixnorm, wenn

$$(a) \quad N(A) \geq 0 \quad \text{und} \quad N(A) = 0 \iff A = 0$$

$$(b) \quad N(cA) = |c| N(A) \quad , \quad c \in \mathbb{C} ,$$

$$(c) \quad N(A+B) \leq N(A) + N(B) \quad ,$$

$$(d) \quad N(A \cdot B) \leq N(A) \cdot N(B)$$

gilt.

Sei $A = \|a_{jk}\|$.

In der vorliegenden Arbeit werden folgende Matrixnormen benutzt:

(1) die Gesamtnorm M $M(A) = n \cdot \max_{j,k} |a_{jk}|$

(2) die Hilbertnorm H $H(A) = \kappa_{\max}$,

wobei $\kappa_{\max}^2$ das Maximum der Eigenwerte von $A \cdot A^*$ ist (A^* ist die zu A konjugiert transponierte Matrix) [1].

Ist N_1 eine beliebige Matrixnorm, T eine feste reguläre Matrix, dann ist N_2 , definiert durch

$$N_2(A) = N_1(T^{-1}AT), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ebenfalls eine Matrixnorm [2].

Eine Matrixnorm hängt von den Elementen der Matrix stetig ab:

Seien $A = \|a_{jk}\|$, $B = \|b_{jk}\|$ Matrizen. N sei eine Matrixnorm.

Dann existiert zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß aus

$$|a_{jk} - b_{jk}| < \delta \quad \text{für } j, k = 1, \dots, n$$

$$|N(A) - N(B)| < \epsilon$$

folgt [3].

Der Raum $\mathbb{C}^{n^2}$ [4] kann mit Hilfe einer Matrixnorm N topologisiert werden. Durch

$$D(A, B) = N(A - B) \quad A, B \in \mathbb{C}^{n^2}$$

ist im $\mathbb{C}^{n^2}$ eine Metrik D gegeben. Die Menge der offenen Kugeln ist Basis einer Topologie auf $\mathbb{C}^{n^2}$.

[1] Bezeichnungen der Normen nach Zurmühl: Matrizen

[2] s. Lancaster: Theory of Matrices [3.] dgl.

[4] $\mathbb{C}^{n^2}$ ist mit der Matrizenadd. und -mult. sowie der äußeren Mult. mit komplexen Zahlen eine $\mathbb{C}$ -Algebra, insbesondere ein n^2 -dim. Vektorraum über $\mathbb{C}$.

In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz bedeutsam. Aus ihm folgt nämlich, daß jede Matrixnorm, mit der man in der eben beschriebenen Weise über die Metrik den Raum $\mathbb{C}^{n^2}$ topologisiert, zu der gleichen Topologie führt.

Der Satz lautet:

Seien N_1 und N_2 beliebige, feste Matrixnormen. Dann gibt es nur von den Normen N_1, N_2 abhängige positive Zahlen r_1 und r_2 , so daß für jede Matrix A aus $\mathbb{C}^{n^2}$ gilt:

$$r_1 \leq \frac{N_1(A)}{N_2(A)} \leq r_2 \quad [1]$$

Sei $((A_m))$ mit $A_m = \|a_{jk}^{(m)}\|$ eine Folge von Matrizen. $((A_m))$ heißt konvergent, wenn eine Matrix $A = \|a_{jk}\|$ existiert, so daß für $j, k = 1, \dots, n$ gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{jk}^{(m)} = a_{jk} \quad [2]$$

Ist N eine beliebige Matrixnorm, dann ist $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$ äquivalent zu $\lim_{m \rightarrow \infty} N(A - A_m) = 0$ [2].

[1] s. Lancaster: Theory ...

[2] s. Lancaster: Theory ...

2. Ein Hilfssatz über die Eigenwerte einer konvergenten Folge von Matrizen

Satz 8 (Hilfssatz)

Sei $((X_m))$ eine Folge n -reihiger quadratischer Matrizen, die gegen eine Matrix X konvergiert. Dann lassen sich die Eigenwerte der Glieder von $((X_m))$ derart in n Folgen aufspalten, daß jede dieser Folgen gegen einen Eigenwert von X konvergiert und jeder Eigenwert von X Grenzwert einer solchen Folge ist.

Beweis:

1. In den Diagonalblöcken einer oberen Jordanschen Normalform J sind die Positionen in der oberen Nebendiagonale mit der Zahl 1 besetzt. Da die Eins nur eine Normierung darstellt, kann man sie, indem man J einer Ähnlichkeitstransformation unterzieht, durch eine andere von Null verschiedene Zahl ersetzen. Die anderen Elemente bleiben bei dieser Transformation natürlich unverändert.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von X , $\mu_1, \dots, \mu_s$ deren Vielfachheiten im charakteristischen Polynom von X und es sei

$$\delta = \min_{1 \leq \nu, \mu \leq s} |\lambda_\nu - \lambda_\mu|.$$

J sei die nicht normierte Jordansche Normalform von X , deren Diagonalblöcke in den oberen Nebendiagonalen $\frac{\delta}{s}$ enthalten. T sei eine reguläre Matrix mit

$$J = T X T^{-1}.$$

Sei $Y_m = T X_m T^{-1}$,

$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X$ ist äquivalent zu $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m = J$.

Da die Eigenwerte gegenüber einer Ähnlichkeitstransformation invariant sind, wird an Stelle von $((X_m))$ im folgenden die Folge $((Y_m))$ untersucht.

2. Sei $Y_m = \|Y_{jk}^{(m)}\|$, und $\lambda_j^{(m)}$, $j=1, \dots, n$, seien die Eigenwerte von Y_m .

Da $((Y_m))$ gegen J konvergiert, gibt es ein $m_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß für $m > m_1$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |Y_{jk}^{(m)}| < \frac{\delta}{4}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

gilt.

Nach dem Satz von Gerschgorin [1] liegt in

$$|z - Y_{kk}^{(m)}| < \frac{\delta}{4}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

ein Eigenwert von Y_m .

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_{kk}^{(m)} = \lambda_{jk}$, $1 \leq j \leq s$

gibt es ein $m_2 \in \mathbb{N}$ derart, daß für $m > m_2$

$$|Y_{kk}^{(m)} - \lambda_{jk}| < \frac{\delta}{4}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

gilt.

Sei $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$.

Dann liegen für $m > m_3$ in

$$|z - \lambda_{jk}| < \frac{\delta}{2}$$

entsprechend der Vielfachheit μ_{jk} von λ_{jk} im charakteristischen Polynom von J μ_{jk} Eigenwerte von Y_m .

Ferner gilt: Für jeden Eigenwert λ_j von J liegt in

[1] S. Zurmühl: Matrizen

$$|z - \lambda_*| < \frac{\delta}{2}$$

wenigstens ein Eigenwert von Y_m ($m > m_3$).

3. Sei $\lambda_{j_k}^{(m)}$ ($m > m_3$) einer der in $|z - \lambda_{j_k}| < \frac{\delta}{2}$ gelegenen Eigenwerte von Y_m .

Behauptung: $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{j_k}^{(m)} = \lambda_{j_k}$

Beweis:

Sei Δ_m bzw. Δ das charakteristische Polynom von Y_m bzw. $\mathbb{Y}$. $((\Delta_m))$ konvergiert gegen Δ . Ferner ist für ein beliebiges, festes $R > 0$ $((\Delta_m))$ in $|z| \leq R$ gleichmäßig beschränkt, d.h., die Konvergenz ist nach dem Satz von Vitali sogar gleichmäßig.

Sei ξ_{j_k} ein Häufungspunkt von $((\lambda_{j_k}^{(m)}))$ und $((\lambda_{j_k}^{(m_\nu)}))$ eine gegen ξ_{j_k} konvergierende Teilfolge.

Sei $\varepsilon > 0$. Für hinreichend groß gewähltes m_ν gilt

$$|\Delta(\xi_{j_k}) - \Delta_{m_\nu}(\lambda_{j_k}^{(m_\nu)})| \leq |\Delta(\xi_{j_k}) - \Delta(\lambda_{j_k}^{(m_\nu)})| + |\Delta(\lambda_{j_k}^{(m_\nu)}) - \Delta_{m_\nu}(\lambda_{j_k}^{(m_\nu)})| < \varepsilon$$

Damit folgt:

$$\Delta(\xi_{j_k}) = \lim_{m_\nu \rightarrow \infty} \Delta_{m_\nu}(\lambda_{j_k}^{(m_\nu)}) = 0$$

Nun ist nach Konstruktion aber λ_{j_k} die einzige Nullstelle von

$$\Delta \text{ in } |z - \lambda_{j_k}| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Es gilt also $\xi_{j_k} = \lambda_{j_k}$.

Da ξ_{j_k} ein beliebiger Häufungspunkt der Folge $((\lambda_{j_k}^{(m)}))$ war,

$$\text{folgt } \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{j_k}^{(m)} = \lambda_{j_k}$$

4. Aus Teil 3 des Beweises folgt mit Rücksicht auf die Ergebnisse von Teil 2 die Behauptung.

3. Eigenschaften des Definitionsbereiches

Definition:

Sei B Teilmenge von $\mathbb{C}$, Y eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_\nu(Y)$,

$\nu = 1, \dots, n$. Dann sei

$$\mathcal{V}(B) = \{X \mid \lambda_\nu(X) \in B, 1 \leq \nu \leq n\}.$$

Satz 9

Sei $B, B \subset \mathbb{C}$, abgeschlossen. Dann ist auch $\mathcal{V}(B)$ abgeschlossen.

Beweis:

Sei X Häufungspunkt von $\mathcal{V}(B)$, $((X_m))$ eine Folge aus $\mathcal{V}(B)$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X.$$

Sei λ ein beliebiger, fester Eigenwert von X .

Nach Satz 8 existiert eine Folge $((\lambda^{(m)}))$ von Eigenwerten von

$$X_m \text{ mit } \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^{(m)} = \lambda.$$

Da B abgeschlossen ist, gilt $\lambda \in B$.

Hieraus folgt: $X \in \mathcal{V}(B)$.

Definition:

Sei $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\varepsilon > 0$.

Dann sei

$$\Delta(X_0, \varepsilon) = \{X \mid M(X - X_0) < \varepsilon\} \quad [1]$$

[1] M bezeichnet, wie verabredet, die Gesamtnorm.

Satz 10

Sei $B, B \subset \mathbb{C}$, offen. Dann ist auch $\mathcal{V}(B)$ offen.

Beweis:

Sei $X \in \mathcal{V}(B)$.

Zu zeigen ist: Es gibt ein $\tau > 0$, so daß gilt:

$$\Delta(X, \tau) \subset \mathcal{V}(B)$$

Beweis indirekt:

Angenommen, es existiert kein solches τ .

Dann gibt es eine Folge $((X_m))$ von Matrizen mit $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X$

und jede Matrix X_m besitzt wenigstens einen nicht in B liegenden Eigenwert.

Sei $((\lambda^{(m)}))$ eine Folge solcher Eigenwerte.

Nach Satz 8 konvergiert eine Teilfolge $((\lambda^{(m_\nu)}))$ von $((\lambda^{(m)}))$ gegen einen Eigenwert λ von X .

Da für alle Glieder der Teilfolge $\lambda^{(m_\nu)} \notin B$ gilt und B offen ist, folgt $\lambda \notin B$.

Widerspruch zu $X \in \mathcal{V}(B)$.

Satz 11

Sei B Teilmenge von $\mathbb{C}$, $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\partial B \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

1. X liegt auf dem Rand von $\mathcal{V}(B)$.
2. Die Eigenwerte von X liegen in $\overline{B}$, wenigstens einer von ihnen auf dem Rand von B .

Beweis:

Beweis:

Sei $\partial \mathcal{V} = \partial \mathcal{V}(B)$.

1. Es gelte $X \in \partial \mathcal{V}$.

Dann gibt es eine Folge $((X_m))$ aus $\mathcal{V}(B)$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X$.

Nach Satz 8 liegen die Eigenwerte von X in $\bar{B}$.

Einer von ihnen muß auf ∂B liegen. Es gibt nämlich eine Folge $((Y_m))$ aus $\mathbb{C}^{n^2} \setminus \mathcal{V}(B)$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m = X$. Nach Satz 8 existiert eine Folge $((\lambda^{(m)}))$ von in CB liegenden Eigenwerten von Y_m , die gegen einen Eigenwert λ von X konvergiert. Es muß $\lambda \in \partial B$ gelten.

2. Sei J die Jordansche Normalform von X ,

$$J = \left\| \begin{array}{cccc} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \bigcirc & \\ & & & J_u \end{array} \right\| \quad \text{mit} \quad J_p = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_p & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_p \end{array} \right\|_{(\mu_p)} \quad , \quad p=1, \dots, u.$$

T sei eine reguläre Matrix mit $X = T^{-1} J T$.

Es gelte o.B.d.A. $\lambda_1 \in \partial B$, $\lambda_v \in B$ ($v=2, \dots, u$).

Sei $((\xi_m))$ eine Folge aus B mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = \lambda_1$.

Dann gilt für die Folge $((T^{-1} J^{(m)} T))$ mit

$$J_m = \left\| \begin{array}{cccc} J_1^{(m)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \bigcirc & \\ & & & J_u \end{array} \right\| \quad , \quad J_1^{(m)} = \left\| \begin{array}{cccc} \xi_m & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \xi_m \end{array} \right\|_{(\mu_1)} ;$$

$T^{-1} J^{(m)} T \in \mathcal{V}(B)$ ($m \in \mathbb{N}$)

und $\lim_{m \rightarrow \infty} T^{-1} J^{(m)} T = X$. Es gilt also $X \in \overline{\mathcal{V}(B)}$.

Wegen $\lambda_1 \in \partial B$ kann X nicht in $(\mathcal{V}(B))^{\circ}$ liegen.

Es folgt also $X \in \partial \mathcal{V}$.

Definition:

Sei $\mathcal{V}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}^{n \times n}$, N eine Matrixnorm.

$\mathcal{V}$ heißt beschränkt, wenn ein $s > 0$ existiert, so daß für jede Matrix X aus $\mathcal{V}$ gilt:

$$N(X) \leq s$$

Andernfalls heißt $\mathcal{V}$ unbeschränkt. [1]

Satz 12

Für die Matrizenordnung n gelte $n \geq 2$; B sei eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Dann ist $\mathcal{V}(B)$ unbeschränkt.

Beweis:

Sei $\lambda \in B$,

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ 0 & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

$$E_{21}(t) = \|e_{jk}(t)\|, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ mit}$$

$$e_{jk}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } j=k \\ t & \text{" } j=2, k=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Entsprechend sei $E_{21}(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, definiert.

$E_{21}(t)$, $E_{21}(-t)$ sind reguläre Matrizen, und es gilt

[1] Aus den Darlegungen von Seite 40 folgt, daß die Beschränktheit nicht von der Wahl der Matrixnorm abhängt.

$$E_{21}(t) \cdot E_{21}(-t) = E, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit $X \in \mathcal{V}(B)$ gilt daher auch $E_{21}(t) \cdot X \cdot E_{21}(-t) \in \mathcal{V}(B), \quad t \in \mathbb{R}.$

Die Berechnung von $Y(t) := E_{21}(t) \cdot X \cdot E_{21}(-t) (t \in \mathbb{R})$ ergibt

$$Y(t) = \begin{vmatrix} \lambda - t & 1 & & & \\ -t^2 & \lambda + t & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{vmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} M(Y(t)) = \infty$ folgt: $\mathcal{V}(B)$ ist unbeschränkt.

Satz 13

Sei $B, B \subset \mathbb{C}$, zusammenhängend. Dann ist auch $\mathcal{V}(B)$ zusammenhängend.

Beweis:

Sei $\lambda \in B$, $X \in \mathcal{V}(B)$.

Zu zeigen ist: X läßt sich in $\mathcal{V}(B)$ stetig mit λE verbinden.

Sei J die Jordansche Normalform von X ,

$$J = \begin{vmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_u \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad J_p = \begin{vmatrix} \lambda_p & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_p \end{vmatrix}, \quad p=1, \dots, u,$$

Seien $\gamma_p = \{z \mid z = z_p(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad z_p(0) = \lambda_p, \quad z_p(1) = \lambda\},$

$p = 1, \dots, u$, Wege in B , und es sei $\gamma = \{z \mid z = 1-t, \quad 0 \leq t \leq 1\}.$

Dann verbindet

$$\Gamma = \{Z \mid Z = T^{-1} J(t) T, 0 \leq t \leq 1\}$$

mit

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & J_u(t) \end{pmatrix}, \quad J_p(t) = \begin{pmatrix} Z_p(t) & 1-t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1-t & \\ & & & Z_p(t) \end{pmatrix}_{(k_p)}$$

$$p = 1, \dots, u, \quad t \in [0, 1],$$

die Matrix X mit $\lambda \in \dots$. Da die Eigenwerte von $Z \in \Gamma$ in B liegen, ist Γ ein Weg in $\mathcal{V}(B)$.

Ein Gebiet $\mathcal{G}$ des Raumes $\mathbb{C}^{n^2}$ ist einfach zusammenhängend, wenn alle in $\mathcal{G}$ gelegenen geschlossenen Wege nullhomotop sind.

Um nachzuweisen, daß $\mathcal{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, genügt es zu zeigen: Jeder in $\mathcal{G}$ liegende Weg $\Gamma = \{\Gamma_{jk}\}$, dessen Komponenten Γ_{jk} einfach geschlossene, in den Projektionen $P_{jk}(\mathcal{G})$ liegende Polygonzüge sind ($j, k = 1, \dots, n$), ist nullhomotop.

Satz 14

Sei $G, G \subset \mathbb{C}$, Gebiet, und für die Matrizenordnung n gelte $n \geq 2$. Dann ist $\mathcal{V}(G)$ einfach zusammenhängend.

Beweis:

Im Fall $G = \mathbb{C}$ ist $\mathcal{V}(G)$ sicher einfach zusammenhängend.

Sei G Gebiet mit $\mathbb{C} \setminus G \neq \emptyset$.

Nach Satz 10 und Satz 13 ist $\mathcal{V}(G)$ Gebiet.

Zu zeigen ist also, daß der Zusammenhang von $\mathcal{V}(G)$ einfach ist.

1. Behauptung: Der Rand $\partial \mathcal{V}$ von $\mathcal{V}(G)$ ist zusammenhängend.

Beweis:

Sei $Z \in \partial \mathcal{V}$, J die Jordansche Normalform von Z und T eine reguläre Matrix mit $Z = T^{-1} J T$,

$$J = \left\| \begin{array}{cccc} J_1 & & & \\ & \bigcirc & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_u \end{array} \right\| \quad \text{mit} \quad J_p = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_p & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_p \end{array} \right\|_{(\mu_p)}, \quad 1 \leq p \leq u.$$

Seien o.B.d.A. $\lambda_\nu \in \partial G$ für $\nu = 1, \dots, m$,

$\lambda_\nu \in G$ für $\nu = m+1, \dots, u$.

Sei $\lambda_0 \in \partial G$.

Zunächst verbindet man λ_ν , $2 \leq \nu \leq u$, in $\bar{G}$ stetig mit λ_0 , die Zahl 1 in der oberen Nebendiagonale von J_ν , $2 \leq \nu \leq u$, stetig mit der Null (Ausführung wie im Beweis zu Satz 13 dargestellt); λ_1 bleibt konstant. Das bedeutet: J wird mit J' ,

$$J' = \left\| \begin{array}{cccc} J_1 & & & \\ \lambda_0 & & & \\ & \bigcirc & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 \end{array} \right\|,$$

durch einen in $\partial \mathcal{V}$ liegenden Weg verbunden.

Nun wird λ_1 in $\bar{G}$ stetig mit λ_0 und die 1 der oberen Nebendiagonale von J_1 stetig mit 0 verbunden; λ_0 bleibt konstant. Das bedeutet: J' wird mit $\lambda_0 E$ durch einen in $\partial \mathcal{V}$ liegenden Weg verbunden.

J kann also durch einen in $\partial \mathcal{V}$ liegenden Weg Γ_0 mit $\lambda_0 E$ verbunden werden.

Sei $\Gamma_0 = \{ \|\xi_{jk}\| \mid \xi_{jk} = \xi_{jk}(t), 0 \leq t \leq 1, 1 \leq j, k \leq n \}$.

Dann verbindet $\Gamma_1 = \{ \|\eta_{jk}\| \mid \eta_{jk} = \eta_{jk}(t), 0 \leq t \leq 1, 1 \leq j, k \leq n \}$

mit $\|\eta_{jk}\| = T^{-1} \|\xi_{jk}\| T$ die Matrix Z mit $\lambda_0 E$.

Γ_1 ist wie Γ_0 ein Weg in $\partial \mathcal{V}$.

Zwei beliebige Matrizen Z_1, Z_2 aus $\partial \mathcal{V}$ können in $\partial \mathcal{V}$ durch Wege über $\lambda_0 E$ miteinander verbunden werden.

2. Sei $\Gamma = \|\Gamma_k\|$ ein in $\mathcal{V}(G)$ liegender Weg, dessen Komponenten Γ_k einfach geschlossene, Polygonzüge sind ($j, k = 1, \dots, n$), $\mathcal{R}(\Gamma)$ das Innere von Γ und X eine beliebige, feste Matrix aus $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Behauptung: $X \in \mathcal{V}(G)$.

Beweis indirekt:

Annahme: $X \notin \mathcal{V}(G)$.

Verbindet man X mit einer Matrix $Y \in \Gamma$ durch einen in $\mathcal{R}(\Gamma)$ gelegenen Weg, dann muß dieser eine Matrix Z_0 aus $\partial \mathcal{V}$ enthalten.

Da $\partial \mathcal{V}$ nach Teil 1 des Beweises zusammenhängend ist, muß

$$\partial \mathcal{V} \subset \mathcal{R}(\Gamma)$$

gelten.

Wegen $\partial G \neq \emptyset$ ist $\partial \mathcal{V}$ unbeschränkt (Satz 12). Mithin ist $\mathcal{R}(\Gamma)$ unbeschränkt.

Widerspruch zur Konstruktion von Γ .

Es gilt also: $X \in \mathcal{V}(G)$

Damit ist der Satz bewiesen.

V I D I E G L E I C H M Ä S S I G E K O N V E R G E N Z D E R ' R E I H E N E N T W I C K L U N G N A C H F A B E R - P O L Y N O M E N

1. Ein Hilfssatz über die Norm der Werte einer analytischen Matrizenfunktion

Satz 15 (Hilfssatz)

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

B sei eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von G , γ eine geschlossene Jordankurve, für deren Inneres $P_\gamma \quad B \subset P_\gamma \subset G$ gilt.

$\mathcal{V}_B(B)$ sei eine abgeschl. beschränkte Teilmenge von $\mathcal{V}(B)$. N sei eine Matrixnorm.

Dann gilt für $X \in \mathcal{V}_B(B)$

$$N(F(X)) \leq r L_\gamma \sup_{z \in \gamma} |f(z)|.$$

r ist eine Konstante, die nur von der Wahl der Norm abhängt.

Beweis:

Die Ungleichung wird über die Darstellung von $F(X)$ nach Satz 7:

$$F(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{zE - X} dz$$

gewonnen.

1. Behauptung: $\mathcal{V}_A := \{Z \mid Z = zE - X, z \in \gamma, X \in \mathcal{V}_B(B)\}$

ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis: Ist bezüglich der Gesamtnorm $\mathcal{V}_B(B)$ durch ein positives m_1 und sind die aus γ erzeugbaren Skalarmatrizen durch ein posi-

tives m_2 beschränkt, dann ist $\mathcal{V}_1$ durch $m_1 + m_2$ beschränkt. $\mathcal{V}_1$ ist dann auch bezüglich einer beliebigen Matrixnorm beschränkt.

Ist Z' ein Häufungspunkt von $\mathcal{V}_1$, dann gibt es konvergente Folgen $((z_m))$ aus γ und $((X_m))$ aus $\mathcal{V}_b(B)$ mit $Z' = \lim_{m \rightarrow \infty} (z_m E - X_m)$.

Da γ und $\mathcal{V}_b(B)$ abgeschlossen sind, folgt $Z' \in \mathcal{V}_1$.

2. Sei Z^* die konjugiert transponierte Matrix von Z , $\kappa_{\min}(Z)$ das Minimum der Eigenwerte von $Z \cdot Z^*$. $\kappa_{\min}(Z)$ ist positiv, wenn Z regulär ist [1]. $\kappa_{\min}(Z)$ ist für $Z \in \mathcal{V}_1$ also stets positiv.

Behauptung: Es existiert ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$\inf_{Z \in \mathcal{V}_1} \kappa_{\min}(Z) \geq \delta^2$$

Beweis indirekt:

Annahme: $\inf_{Z \in \mathcal{V}_1} \kappa_{\min}(Z) = 0$.

Dann existiert eine Folge $((Z_m))$ aus $\mathcal{V}_1$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa_{\min}(Z_m) = 0$.

Da $\mathcal{V}_1$ abgeschlossen und beschränkt ist, existiert eine Matrix Z_0 aus $\mathcal{V}_1$ und eine Teilfolge $((Z_{m_j}))$ von $((Z_m))$ mit $\lim_{m_j \rightarrow \infty} Z_{m_j} = Z_0$.

Nach Satz 8 ist dann $\lim_{m_j \rightarrow \infty} \kappa_{\min}(Z_{m_j}) = 0$ Eigenwert von $Z_0 \cdot Z_0^*$.

Daraus folgt: Z_0 ist eine singuläre Matrix. Widerspruch!

3. H bezeichne die Hilbert - Norm.

Für eine feste Matrix $X \in \mathcal{V}_b(B)$ und beliebiges $z \in \gamma$ gilt

$$H\left(\frac{E}{zE - X}\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_{\min}(zE - X)}} \leq \frac{1}{\delta}.$$

$$H(F(X)) = \frac{1}{2\pi} H\left(\int_{\gamma} \frac{f(z)}{zE-X} dz\right).$$

Mit Rückgriff auf die Darstellung des Integrals als Grenzwert einer Riemannschen Summe folgt

$$H(F(X)) \leq \frac{1}{2\pi} L_{\gamma} \frac{1}{\delta} \sup_{z \in \gamma} |f(z)|.$$

Sei nun N eine beliebige Matrixnorm und $r(N)$ eine positive Zahl mit

$$N(A) \leq 2\pi r H(A), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Dann folgt

$$N(F(X)) \leq r \cdot L_{\gamma} \sup_{z \in \gamma} |f(z)|, \quad X \in \mathcal{V}_b^{\sigma}(B).$$

2. Der Satz über die gleichmäßige Konvergenz

Satz 16

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

B sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit $\bar{B} \subset G$,
 $\mathcal{V}_b^{\sigma}(B)$ sei eine ^{abgeschl.} beschränkte Teilmenge von $\mathcal{V}^{\sigma}(B)$.

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(z)$ sei die Entwicklung von f nach Faber-Polynomen bezüglich B .

Dann konvergiert

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(X)$$

auf $\mathcal{V}_b^{\sigma}(B)$ gleichmäßig gegen $F(X)$.

Beweis:

Die einfach geschlossene Kurve L_r und ihr Innengebiet B_r sowie

der Radius R sollen das gleiche bedeuten wie im Satz von Faber ^[1].

Da in B_R mit f auch f_{m_0} , definiert durch

$$f_{m_0}(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m p_m(z), \quad z \in B_R,$$

analytisch ist, gilt nach Satz 7 für $X \in \mathcal{V}(B)$

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m p_m(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_T} \frac{\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m p_m(z)}{zE - X} dz$$

Sei N eine Matrixnorm.

Da $\mathcal{V}_b(B)$ ^{u. abgeschl.} beschränkt ist, folgt nach Satz 15 für $X \in \mathcal{V}_b(B)$

$$N\left(\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m p_m(X)\right) \leq T \cdot L_{L_T} \cdot \sup_{z \in L_T} \left| \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m p_m(z) \right|.$$

Da $\sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(z)$ auf L_T gleichmäßig konvergiert, folgt aus der Ungleichung die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(X)$ auf $\mathcal{V}_b(B)$.

3. Die Komponenten der analytischen Matrizenfunktion als analytische Funktion in mehreren Veränderlichen

Satz 17

Sei f eine im Gebiet $G, G \subset \mathcal{A}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion,

Dann sind die Komponenten F_{jk} von $F = \|F_{jk}\|$ in $\mathcal{V}(G)$ analytische Funktionen in den Komponenten der Matrizen von $\mathcal{V}(G)$.

[1] s. Seite 20

Beweis:

Sei $X_0 \in \mathcal{V}(G)$.

B , mit $\bar{B} \subset G$ sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet, das sämtliche Eigenwerte von X_0 enthält.

$\mathcal{V}_b(B)$ sei eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{V}(B)$ mit $X_0 \in \mathcal{V}_b(B)$.

Sei $\sum_{m=c}^{\infty} a_m \rho_m(X)$ die Entwicklung von F nach Faber-Polynomen bezüglich des Gebietes B und

$$\sum_{m=c}^{\infty} a_m f_m(X) = \left\| \sum_{m=c}^{\infty} a_m \rho_{jk}^{(m)}(X) \right\|, \quad X \in \mathcal{V}_b(B).$$

Da die Entwicklung nach Faber-Polynomen in $\mathcal{V}_b(B)$ gleichmäßig konvergiert, gilt dies auch für die Entwicklung der Komponenten F_{jk} :

$$F_{jk}(X) = \sum_{m=c}^{\infty} a_m \rho_{jk}^{(m)}(X), \quad X \in \mathcal{V}_b(B), \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Sei $\Pi_{\nu\mu} := \Pi_{\nu\mu}[\mathcal{V}_b(B)]$ die Projektion von $\mathcal{V}_b(B)$ auf die Komponente mit dem Indexpaar (ν, μ) , $X_0 = \|X_{TS}^{(0)}\|$,

$$\mathcal{V}_b^{\nu(\nu, \mu)} = \{X \mid X = \|X_{TS}\|; X_{\nu\mu} \in \Pi_{\nu\mu}; X_{TS} = X_{TS}^{(0)}, (r, s) \neq (\nu, \mu)\}.$$

Dann konvergiert auch die Reihenentwicklung von $F_{jk}|_{\mathcal{V}_b^{\nu(\nu, \mu)}}$ gleichmäßig, d.h., $F_{jk}|_{\mathcal{V}_b^{\nu(\nu, \mu)}}$ ist in $X_{\nu\mu}^{(0)}$ analytisch in der Variablen $X_{\nu\mu}$.

Nach dem Satz von Hartogs folgt: F_{jk} ist in X_0 eine analytische Funktion der Veränderlichen X_{rs} ($r, s = 1, \dots, n$).

VII DIE TAYLORENTWICKLUNG DER ANALYTISCHEN MATRIZENFUNKTIONEN

1. Differenzierbarkeit und Taylorentwicklung

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Sei $X_0 = \|x_{jk}^{(0)}\|$ aus $\mathcal{V}(G)$ und $R = \|r_{jk}\|$ eine Matrix mit positiven Elementen derart, daß der Polyzylinder

$$\Delta(X_0, R) = \{X \mid X = \|x_{jk}\|, |x_{jk} - x_{jk}^{(0)}| < r_{jk}, 1 \leq j, k \leq n\}$$

in $\mathcal{V}(G)$ liegt.

Nach Satz 17 kann für feste ν, μ die Komponente $F_{\nu\mu}$ von $F = \|F_{jk}\|$ um X_0 in eine für jedes X aus $\Delta(X_0, R)$ gültige Taylor-Reihe entwickelt werden.

Mit den Bezeichnungen

$$F_{\nu\mu} = F_{\nu\mu}(X_0), \quad \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_{jk}} = \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_{jk}}(X_0) \quad \text{usw.}$$

$$X - X_0 = \| \Delta_{jk} \|,$$

gilt für $X \in \Delta(X_0, R)$:

$$\begin{aligned} F_{\nu\mu}(X) = F_{\nu\mu}(X_0) &+ \sum_{j_1, j_2=1}^n \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_{j_1 j_2}} \Delta_{j_1 j_2} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{m!} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \frac{\partial^m F_{\nu\mu}}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{m-1} j_m}} \Delta_{j_1 j_2} \dots \Delta_{j_{m-1} j_m} + \dots \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Matrix

$$\frac{\partial^m F}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{m-1} j_m}} := \left\| \frac{\partial^m F_{\nu\mu}}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{m-1} j_m}} \right\|$$

die man als partielle Ableitung von F nach den Veränderlichen

$X_{j_1 j_2}, \dots, X_{j_{m-1} j_m}$ bezeichnen kann, lassen sich die Taylorreihen von $F_{j\mu}$ ($j, \mu = 1, \dots, n$) zu einer Reihe zusammenfassen:

Satz 18

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Sei $X_0 \in \mathcal{V}(G)$, $\Delta(X_0, R)$ ein in $\mathcal{V}(G)$ gelegener Polyzylinder.

Dann gilt für jedes X aus $\Delta(X_0, R)$

$$F(X) = F(X_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \frac{\partial^m F(X_0)}{\partial X_{j_1 j_1} \dots \partial X_{j_{m-1} j_m}} (X_{j_1 j_1} - X_{j_1 j_1}^{(0)}) \dots (X_{j_{m-1} j_m} - X_{j_{m-1} j_m}^{(0)})$$

2. Die Integraldarstellung der Ableitungen

Die oben eingeführten partiellen Ableitungen von F lassen sich durch Integrale mit matriziellen Integranden darstellen.

Für die Ableitungen 1. Ordnung gilt

Satz 19

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Sei $X \in \mathcal{V}(G)$, γ eine geschlossene Jordankurve, in deren Innerem P_γ sämtliche Eigenwerte von X liegen, und es gelte $\overline{P_\gamma} \subset G$.

Dann gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial X_{j,k}}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE - X} E_{j,k} \frac{E}{zE - X} dz, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Dabei ist $E_{jk} = \|e_{rs}^{(j,k)}\|$ mit $e_{jk}^{(j,k)} = 1, e_{rs}^{(j,k)} = 0$ für $(rs) \neq (j,k)$. [1]

Beweis:

Sei $\Delta x > 0$ so gewählt, daß die Eigenwerte von $X + \Delta x E_{jk}$ in P_T liegen.

Dann folgt nach Satz 7

$$\frac{F(X + \Delta x E_{jk}) - F(X)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \left[\frac{E}{zE - X - \Delta x E_{jk}} - \frac{E}{zE - X} \right] dz$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{E}{zE - X - \Delta x E_{jk}} - \frac{E}{zE - X} &= \\ &= \frac{E}{zE - X - \Delta x E_{jk}} \left[E - (zE - X - \Delta x E_{jk}) \frac{E}{zE - X} \right] \\ &= \frac{E}{zE - X - \Delta x E_{jk}} \Delta x E_{jk} \frac{E}{zE - X} \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{F(X + \Delta x E_{jk}) - F(X)}{\Delta x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE - X - \Delta x E_{jk}} E_{jk} \frac{E}{zE - X} dz$$

Sei $((\Delta x)_m)$ eine Nullfolge positiver Zahlen $(\Delta x)_m$. Dann ist die Folge $\left(\left(\frac{E}{zE - X - (\Delta x)_m E_{jk}} \right) \right)$

bezüglich $z \in \gamma$ gleichmäßig beschränkt [2], Da sie punktweise gegen $(zE - X)^{-1}$ konvergiert, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Daher gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_{jk}}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{E}{zE - X - \Delta x E_{jk}} E_{jk} \frac{E}{zE - X} dz$$

[1] Definition des Integrals wie auf Seite 35

[2] s. Beweis zu Satz 15 : Abschätzung der Hilbertnorm von $(zE - \gamma)^{-1}$ für $z \in \gamma, \gamma \in \mathcal{U}_b(B)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{jk}}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE-X} E_{jk} \frac{E}{zE-X} dz.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Auch die Ableitungen höherer Ordnung lassen sich durch Integrale darstellen:

Satz 19a

Bezeichnet S_m die Permutationen der m Tripel

$$(j_1, j_2, 1), (j_3, j_4, 2), \dots, (j_{2m-1}, j_{2m}, m)$$

$$\text{und ist } E_{j_{2k-1} j_{2k} k} = E_{j_{2k-1} j_{2k}} \quad k=1, \dots, m,$$

dann gilt unter den Voraussetzungen von Satz 19 für die m -ten Ableitungen ($m \geq 1$) von F nach $x_{j_1 j_2}, \dots, x_{j_{2m-1} j_{2m}}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^m F}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{2m-1} j_{2m}}}(X) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in S_m} \int_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE-X} E_{x_1} \frac{E}{zE-X} E_{x_2} \dots \frac{E}{zE-X} E_{x_m} \frac{E}{zE-X} dz. \end{aligned}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Nach Satz 19 ist die Behauptung für $m = 1$ richtig.

Annahme: Sie gilt für $m = m_0$.

Sei α ein festes Zahlenpaar aus $(1, \dots, n) \times (1, \dots, n)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^{m_0} F}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{2m_0-1} j_{2m_0}}}(X + \Delta X E_{\alpha}) - \frac{\partial^{m_0} F}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{2m_0-1} j_{2m_0}}}(X) \right) \cdot \frac{1}{\Delta X} = \\ & = \frac{1}{2\pi i \Delta X} \left\{ \int_{\gamma} f(z) \sum_{S_{m_0}} \left[\frac{E}{zE-X-\Delta X E_{\alpha}} E_{x_1} \dots E_{x_{m_0}} \frac{E}{zE-X-\Delta X E_{\alpha}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{E}{zE-X} E_{x_1} \dots E_{x_{m_0}} \frac{E}{zE-X} \right] \right\} dz \end{aligned}$$

Für die in eckige Klammern gesetzte Summe gilt nun, wie man durch vollständige Induktion zeigen kann:

$$\begin{aligned}
 & [\dots] \cdot \frac{1}{\Delta X} = \\
 & = \frac{E}{zE-X-\Delta X E_{\kappa}} E_{\kappa} \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_1} \frac{E}{zE-X} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_{m_0}} \frac{E}{zE-X} + \\
 & + \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_1} \frac{E}{zE-X-\Delta X E_{\kappa}} E_{\kappa} \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_2} \frac{E}{zE-X} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_{m_0}} \frac{E}{zE-X} + \\
 & + \dots \\
 & + \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_1} \frac{E}{zE-X} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_{m_0-1}} \frac{E}{zE-X-\Delta X E_{\kappa}} E_{\kappa} \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_{m_0}} \frac{E}{zE-X} + \\
 & + \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_1} \frac{E}{zE-X} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_{m_0}} \frac{E}{zE-X-\Delta X E_{\kappa}} E_{\kappa} \frac{E}{zE-X}
 \end{aligned}$$

Ersetzt man nun im Integranden die eckige Klammer durch diesen Ausdruck und führt man den Grenzübergang $\Delta X \rightarrow 0$ durch, so kann man analog zum Beweis von Satz 19 Integration und Grenzübergang vertauschen. Man erhält schließlich mit $\partial X_{\kappa} := \partial X_{j_1, m_0+1, j_2, m_0+2}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial F}{\partial X_{j_1, 1, 2} \dots \partial X_{j_2, m_0+1, j_2, m_0} \partial X_{j_2, m_0+1, j_2, m_0+2}} (X) = \\
 & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[f(z) \sum_{S_{m_0+1}} \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_1} \frac{E}{zE-X} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE-X} E_{\kappa_{m_0+1}} \frac{E}{zE-X} \right] dz
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß die Behauptung auch für $m = m_0 + 1$ gilt.

3. Die Taylor - Entwicklung für kommutative Matrizen

Satz 20

Sei f eine im Gebiet $G, G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, $F^{(m)}$ die mit $f^{(m)}$ korrespondierende analytische Matrizenfunktion ($m \in \mathbb{N}_0$).

Sei $X_0 \in \mathcal{V}(G)$, $\Delta(X_0, R)$ ein in $\mathcal{V}(G)$ gelegener Polyzylinder.

Dann gilt für jedes X aus $\Delta(X_0, R)$ mit $X \cdot X_0 = X_0 \cdot X$

$$F(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} F^{(m)}(X_0) \cdot (X - X_0)^m \quad [1]$$

Beweis:

Für das m -te Glied $T_m(X)$ der Taylorreihe von Satz 18

$$T_m(X) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \frac{\partial^m F(X_0)}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{2m-1} j_{2m}}} \Delta_{j_1 j_2} \dots \Delta_{j_{2m-1} j_{2m}}$$

$$\text{mit } \Delta_{j_{2k-1} j_{2k}} = X_{j_{2k-1} j_{2k}} - X_{j_{2k-1} j_{2k}}^{(0)}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

gilt nach Satz 19a

$$T_m(X) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in S_m} \left[\frac{E}{zE - X_0} E_{x_1} \dots E_{x_m} \frac{E}{zE - X_0} \right] dz \cdot \Delta_{j_1 j_2} \dots \Delta_{j_{2m-1} j_{2m}} \right\},$$

wobei S_m von $j_1, \dots, j_{2m}$ abhängt ($m \in \mathbb{N}$).

Sei $\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ s_1 & \dots & s_m \end{pmatrix}$ eine feste Permutation der Zahlen $1, \dots, m$.

Dann ist

$$\begin{pmatrix} (j_1, j_2, 1) & \dots & (j_{2m-1}, j_{2m}, m) \\ (j_{2s_1-1}, j_{2s_2}, s_1) & \dots & (j_{2s_m-1}, j_{2s_m}, s_m) \end{pmatrix}$$

eine feste Permutation der Tripel

[1] Der Satz ist von Phillips in einer Arbeit über Polynome und konvergente Reihen in paarweise kommutativen Matrizen bewiesen worden. Phillips: Functions ... (1919)

$$(j_{11}, j_{12}, 1), \dots, (j_{2m-1}, j_{2m}, m).$$

Für die Teilsumme $T_m(X; (s_1 \dots s_m))$ von $T_m(X)$, bei der nur die Summanden mit der oben angegebenen festen Permutation berücksichtigt werden, gilt

$$\begin{aligned} T_m(X; (s_1 \dots s_m)) &= \\ &= \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{j_{11}, \dots, j_{2m}=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[f(z) \frac{E}{zE-X_0} E_{j_{2s_1-1} j_{2s_1}} \frac{E}{zE-X_0} \cdot \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{E}{zE-X_0} E_{j_{2s_{m-1}-1} j_{2s_m}} \frac{E}{zE-X_0} \right] dz \cdot \Delta_{j_{11} j_{12}} \cdot \dots \Delta_{j_{2m-1} j_{2m}} \Big\} \\ &= \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{j_{11}, \dots, j_{2m}=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[f(z) \frac{E}{zE-X_0} E_{j_{2s_1-1} j_{2s_1}} \cdot \Delta_{j_{2s_1-1} j_{2s_1}} \frac{E}{zE-X_0} \cdot \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{E}{zE-X_0} E_{j_{2s_{m-1}-1} j_{2s_m}} \cdot \Delta_{j_{2s_{m-1}-1} j_{2s_m}} \frac{E}{zE-X_0} \right] dz \Big\} \\ &= \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{j_{11}, \dots, j_{2m}=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[f(z) \frac{E}{zE-X_0} E_{11 j_{12}} \Delta_{j_{11} j_{12}} \frac{E}{zE-X_0} \cdot \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{E}{zE-X_0} E_{j_{2m-1} j_{2m}} \Delta_{j_{2m-1} j_{2m}} \frac{E}{zE-X_0} \right] dz \Big\} \\ &= \frac{1}{m!} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma} \left[f(z) \frac{E}{zE-X_0} \left(\sum_{j_{11}, j_{12}=1}^n \Delta_{j_{11} j_{12}} E_{j_{11} j_{12}} \right) \frac{E}{zE-X_0} \cdot \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{E}{zE-X_0} \left(\sum_{j_{2m-1}, j_{2m}=1}^n \Delta_{j_{2m-1} j_{2m}} E_{j_{2m-1} j_{2m}} \right) \frac{E}{zE-X_0} \right] dz \Big\} \end{aligned}$$

$$T_m(X; (s_1, \dots, s_m)) =$$

$$\frac{1}{m!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[f(z) \frac{E}{zE-X_0} (X-X_0) \frac{E}{zE-X_0} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE-X_0} (X-X_0) \frac{E}{zE-X_0} \right] dz$$

Wegen $X \cdot X_0 = X_0 \cdot X$ folgt

$$T_m(X; (s_1, \dots, s_m)) = \frac{1}{m!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(zE-X_0)^{m+1}} dz \cdot (X-X_0)^m$$

Da S_m $m!$ Permutationen hat, folgt

$$T_m(X) = \frac{1}{m!} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(zE-X_0)^{m+1}} dz \cdot (X-X_0)^m$$

Mit Rücksicht auf Satz 7 gilt

$$T_m(X) = \frac{1}{m!} F^{(m)}(X_0) (X-X_0)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt die Behauptung:

$$F(X) = F(X_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} F^{(m)}(X_0) (X-X_0)^m.$$

5. Die Vollständigkeit des Potenzreihensatzes von Weyr

Satz 21

Sei M eine beliebige n -reihige Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. $[f]_M$ sei die Menge der in den Punkten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ analytischen Funktionen einer komplexen Variablen, $[F]_M$ sei die Menge der korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen.

Hat jedes $F \in [F]_M$ in M eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (X-M)^m B_m$$

mit konstanten Matrizen A_0, A_m, B_m ($m \in \mathbb{N}$), dann ist M eine Skalarmatrix, $M = \lambda E$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), und die Reihenentwicklung ist, wenn eines der betragsgrößten Elemente von B_m ($B_m \neq 0$) durch 1 normiert ist, die des Satzes von Weyr/Hensel. Es gilt dann

$$F(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (X - \lambda E)^m$$

für jede Matrix X , deren Eigenwerte im Konvergenzbereich der Entwicklung $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - \lambda)^m$ von f um λ liegen.

Beweis:

Es wird gezeigt: Ist M keine Skalarmatrix, dann führt die Annahme der Existenz einer Potenzreihenentwicklung für jede Funktion aus $[F]_M$ zum Widerspruch. Ist aber M Skalarmatrix, dann ist die Potenzreihenentwicklung die des Satzes von Weyr/Hensel.

1. J sei die Jordansche Normalform von M , T sei eine reguläre Matrix mit $J = T^{-1} M T$.

Ist f in $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ analytisch, dann existiert ein einfach zusammenhängendes Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, mit $\lambda_\nu \in G$ ($\nu=1, \dots, n$), in dem f analytisch ist.

Sei $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung von M mit $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}(G)$ und

$$F(X) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (X-M)^m B_m, \quad X \in \mathcal{U},$$

$\mathcal{U}$ wird durch die homöomorphe Abbildung $L: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ mit

$$L(X) = T^{-1} X T$$

auf eine Umgebung $\mathcal{W}$ von J abgebildet. Es gilt $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G)$; denn die Ähnlichkeitstransformation erhält die Eigenwerte.

Sei nun $Y_0 \in \mathcal{W}$ und $X_0 = T Y_0 T^{-1}$.

Dann gilt $X_0 \in \mathcal{U}$ und

$$\begin{aligned} F(Y_0) &= T^{-1} F(X_0) T \\ &= T^{-1} \left[A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (X_0 - M)^m B_m \right] T \\ &= T^{-1} A_0 T + \sum_{m=1}^{\infty} [T^{-1} A_m (X_0 - M)^m B_m T]. \end{aligned}$$

Wegen $T^{-1} (X_0 - M)^m T = [T^{-1} (X_0 - M) T]^m$, $m \in \mathbb{N}$,

folgt

$$F(Y_0) = T^{-1} A_0 T + \sum_{m=1}^{\infty} [T^{-1} A_m T] [T^{-1} (X_0 - M) T]^m [T^{-1} B_m T],$$

Mit den Bezeichnungen

$$C_0 = T^{-1} A_0 T, \quad C_m = T^{-1} A_m T, \quad D_m = T^{-1} B_m T, \quad m \in \mathbb{N},$$

erhält man

$$F(Y_0) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m (Y_0 - J)^m D_m,$$

Damit ist gezeigt:

Wenn sich F in der Umgebung $\mathcal{U}$ von M in eine Matrizenpotenzreihe entwickeln läßt, dann gibt es auch eine Reihenentwicklung in einer

Umgebung $\mathcal{W}$ der Jordanschen Normalform J von M . Es genügt also zu zeigen, daß die Skalarmatrizen die einzigen Jordanmatrizen sind, um die F in Potenzreihe entwickelt werden kann.

2. Die Matrix M habe bereits Jordansche Normalform. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_u \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M_p = \begin{pmatrix} \lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad (1 \leq p \leq u).$$

Sei $\varepsilon_1 > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| < \varepsilon_1$

$$(M + tE) \in \mathcal{W},$$

wenn ε_1 hinreichend klein ist.

Setzt man

$$X = M + tE, \quad |t| < \varepsilon_1,$$

dann gilt einerseits

$$F(X) = F(M) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m B_m t^m.$$

Wegen $X \cdot M = M \cdot X$ gilt nach Satz 20 andererseits

$$F(X) = F(M) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} F^{(m)}(M) t^m.$$

Auf Grund des Identitätssatzes für Potenzreihen in einer Variablen folgt

$$A_m \cdot B_m = \frac{1}{m!} F^{(m)}(M) \quad m \in \mathbb{N}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$A_m = \|a_{jk}^{(m)}\|, \quad B_m = \|b_{jk}^{(m)}\|, \quad G_m = A_m \cdot B_m, \quad G_m = \|g_{jk}^{(m)}\| \quad (m \in \mathbb{N}),$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_p = \sum_{\nu=1}^p \mu_\nu \quad (2 \leq p \leq u)$$

gilt

a) für (j,k) mit $k = \zeta_{p-1} + s$, $1 \leq s \leq \mu_p$,

und $j = \zeta_{p-1} + r$, $1 \leq r \leq s$,

$p = 2, \dots, u$,

$$g_{jk}^{(m)} = \frac{1}{m!} \frac{1}{(k-j)!} f^{(m+k-j)}(\lambda_p) ,$$

b) für die übrigen Paare (j,k)

$$g_{jk}^{(m)} = 0 \quad , m \in \mathbb{N} ,$$

d.h., wenn das Paar (j,k) eine Position unterhalb der Hauptdiagonalen oder außerhalb der Jordanblöcke (bezogen auf die Jordan - Matrix M) kennzeichnet, gilt $g_{jk}^{(m)} = 0$. Innerhalb des p-ten Blocks stimmen die $g_{jk}^{(m)}$ in der Hauptdiagonale bzw. in den oberen Nebendiagonalen überein.

3. Behauptung: Für (j,k) mit

$$k = \zeta_{p-1} + s \quad , \quad 1 \leq s \leq \mu_p ,$$

$$j = \zeta_{p-1} + r \quad , \quad 1 \leq r \leq s \quad , \quad p = 2, \dots, u ,$$

gilt

$$g_{jk}^{(m)} = \sum_{v=\zeta_{p-1}+1}^{\zeta_p} a_{jv}^{(m)} b_{vk}^{(m)} \quad , m \in \mathbb{N} .$$

Beweis:

Ist ε_2 eine hinreichend kleine positive Zahl, dann liegt für $|t| < \varepsilon_2$

$$\lambda = \begin{vmatrix} M_1 + E_{(\mu_1)} t & & & & \\ & M_{p-1} + E_{(\mu_{p-1})} t & & & \\ & & M_p & & \\ & & & M_{p+1} + E_{(\mu_{p+1})} t & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & M_u + E_{(\mu_u)} t \end{vmatrix}$$

noch in $\mathcal{U}$.

Für die Komponente F_{jk} von $F = \|F_{jk}\|$ gilt

$$F_{jk}(X) = \frac{1}{(k-j)!} f^{(k-j)}(\lambda_p) \quad , \quad \zeta_{p-1} < j < \zeta_p, \quad j \leq k \leq \zeta_p. \quad \oplus$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} F(X) &= F(M) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m B_m t^m \\ m. + A_m B_m &= \left\| \sum_{\nu=1}^{\zeta_p-1} a_{j\nu}^{(m)} b_{\nu k}^{(m)} + \sum_{\nu=\zeta_p+1}^n a_{j\nu}^{(m)} b_{\nu k}^{(m)} \right\| \\ &= \left\| g_{jk}^{(m)} - \sum_{\nu=\zeta_{p-1}+1}^{\zeta_p} a_{j\nu}^{(m)} b_{\nu k}^{(m)} \right\| \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf $\oplus$ folgt nach dem Identitätssatz für Potenzreihen in einer Veränderlichen

$$g_{jk}^{(m)} - \sum_{\nu=\zeta_{p-1}+1}^{\zeta_p} a_{j\nu}^{(m)} b_{\nu k}^{(m)} = 0, \quad \zeta_{p-1} < j \leq \zeta_p, \quad j \leq k \leq \zeta_p.$$

Daraus folgt die Behauptung.

4. Behauptung:

Wenn die Jordansche Normalform M einen Jordanblock der Form

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{array} \right\|_{(v)}, \quad \lambda \leq v \leq n$$

enthält, d.h., es gibt eine Zahl λ , so daß mit $M = \|m_{jk}\|$ gilt

$$m_{\ell+\lambda\ell+1} = m_{\ell+2\ell+2} = \dots = m_{\ell+v\ell+v} = 1$$

$$m_{\ell\ell} \neq \lambda, \quad m_{\ell+v+1, \ell+v+1} \neq \lambda,$$

$$m_{\ell+1\ell+2} = m_{\ell+2\ell+3} = \dots = m_{\ell+v-1, \ell+v} = 1,$$

dann ist f identisch Null.

Beweis:

Sei q eine feste Zahl mit $l+1 \leq q < l+v$.

$E_{q+1,q}(t)$ sei eine Additionsmatrix, die aus der Einheitsmatrix dadurch entsteht, daß in der Position $(q+1, q)$ zusätzlich die komplexe Variable t auftritt. Es gilt $E_{q+1,q}(t) \cdot E_{q+1,q}(-t) = E$.

Ist ε_3 eine hinreichend kleine positive Zahl, dann gilt für $|t| < \varepsilon_3$:

$$\bar{E}_{q+1,q}(t) F(M) E_{q+1,q}(-t) = F(M) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m [E_{q+1,q}(t) \cdot M E_{q+1,q}(-t) - M]^m B_m$$

Die Berechnung von $E_{q+1,q}(t) F(M) E_{q+1,q}(-t)$ ergibt

für die Untermatrix mit den Indexpaaren (σ, τ) mit $l+1 \leq \sigma, \tau \leq l+v$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(q-1)!} f^{(q-1)}(\lambda) - t \frac{1}{q!} f^{(q)}(\lambda) & \frac{1}{q!} f^{(q)}(\lambda) & \frac{1}{(q+1)!} f^{(q+1)}(\lambda) & \dots & \frac{1}{(v-q)!} f^{(v-q)}(\lambda) \\ & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & f(\lambda) - t f'(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!} f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(v-q)!} f^{(v-q)}(\lambda) \\ & & -t^2 f'(\lambda) & f(\lambda) + t f'(\lambda) & f'(\lambda) + t \frac{1}{2!} f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(v-q-1)!} f^{(v-q-1)}(\lambda) + t \frac{1}{(v-q)!} f^{(v-q)}(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Die Berechnung von $F(M) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m [E_{q+1,q}(t) M E_{q+1,q}(-t) - M]^m B_m$

ergibt für die gleiche Untermatrix

$$\begin{aligned} h(\sigma, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{\sigma q+1}^{(2m-1)} b_{q+1 \tau}^{(2m-1)} - a_{\sigma q}^{(2m-1)} b_{q \tau}^{(2m-1)}] t^{2m-1} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [-a_{\sigma q+1}^{(2m-1)} b_{q \tau}^{(2m-1)} + a_{\sigma q}^{(2m)} b_{q \tau}^{(2m)} + a_{\sigma q+1}^{(2m)} b_{q+1 \tau}^{(2m)}] t^{2m} \end{aligned}$$

$$\text{mit } h(\sigma, \tau) = \begin{cases} 0 & \sigma > \tau \\ \frac{1}{(\tau-\sigma)!} f^{(\tau-\sigma)}(\lambda) & \sigma \leq \tau \end{cases} \quad |t| < \varepsilon_3.$$

Koeffizientenvergleich:

Für $m \geq 2$ verschwinden die Koeffizienten der Reihenentwicklung in t .

$$\text{Aus } a_{\sigma q}^{(2m-1)} b_{q\tau}^{(2m-1)} = a_{\sigma q+1}^{(2m-1)} b_{q+1\tau}^{(2m-1)}$$

folgt

$$g_{\sigma\tau}^{(2m-1)} = v \cdot a_{\sigma q}^{(2m-1)} b_{q\tau}^{(2m-1)}, \quad q = \ell+1, \dots, \ell+v; \quad m \geq 2.$$

Da für $\sigma > \tau$ $g_{\sigma\tau}^{(m)} = 0$ gilt, folgt insbesondere

$$a_{\sigma q}^{(2m-1)} b_{q\tau}^{(2m-1)} = 0, \quad q = \ell+1, \dots, \ell+v; \quad m \geq 2; \quad \sigma > \tau.$$

Für $\sigma > \tau$ gilt also $a_{\sigma q}^{(2m-1)} = 0$ oder $b_{q\tau}^{(2m-1)} = 0$.

Fall I: $a_{\sigma q}^{(2m-1)} = 0$.

Es folgt $a_{\sigma q}^{(2m-1)} b_{q\sigma}^{(2m-1)} = 0$,

also $g_{\sigma\sigma}^{(2m-1)} = 0$, $f^{(2m-1)}(\lambda) = 0$ ($m \geq 2$).

Fall II: $b_{q\tau}^{(2m-1)} = 0$.

Es folgt $a_{\tau q}^{(2m-1)} b_{q\tau}^{(2m-1)} = 0$,

also $g_{\tau\tau}^{(2m-1)} = 0$, $f^{(2m-1)}(\lambda) = 0$ ($m \geq 2$).

Es gilt also in jedem Fall $f^{(2m-1)}(\lambda) = 0$, $m \geq 2$.

Sei g_1 eine Stammfunktion von f in G . Nach Voraussetzung gilt dann auch

$$g_1^{(2m-1)}(\lambda) = 0, \quad m \geq 2.$$

Damit folgt $f^{(m)}(\lambda) = 0$, $m \geq 2$.

Ist g_2 eine Stammfunktion von g_1 in G , so folgt aus $g_2^{(3)}(\lambda) = C$ $f'(\lambda) = 0$. Ist g_3 Stammfunktion von g_2 in G , dann erhält man aus $g_3^{(4)}(\lambda) = 0$ $f(\lambda) = 0$.

Also ist f identisch null.

Damit ist die Behauptung des Teils 4 bewiesen.

5. Behauptung:

Wenn die Jordansche Normalform M wenigstens zwei verschiedene Eigenwerte enthält, dann ist f identisch null.

Beweis:

M habe in Zeile o bzw. Zeile p die Eigenwerte λ_o bzw. λ_p , und es gelte $\lambda_o \neq \lambda_p$.

Sind $\varepsilon_4, \varepsilon_5$ hinreichend kleine positive Zahlen, dann gilt für die komplexen Variablen t_1 und t_2 in $|t_1| < \varepsilon_4, |t_2| < \varepsilon_5$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{p_i}(t_2) \bar{E}_{o_p}(t_1) F(\eta) E_{o_p}(-t_1) E_{p_i}(-t_2) = \\ = A_o + \sum_{m=1}^{\infty} A_m [E_{p_i}(t_2) \bar{E}_{o_p}(t_1) M E_{o_p}(t_1) E_{p_i}(-t_2) - M]^m B_m. \end{aligned}$$

Die Berechnung der linken Seite der Gleichung liefert für das Element mit dem Indexpaar (o, p)

$$[f(\lambda_p) - f(\lambda_o)] t_1, \quad |t_1| < \varepsilon_4.$$

Die Berechnung der rechten Seite führt für das gleiche Element auf

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} [(-1)^m (\lambda_p - \lambda_o)^{2m-1} a_{o_p}^{(2m-1)} b_{p_i}^{(2m-1)} (t_1^{m-1} t_2^m + t_1^m t_2^{m-1}) \\ + (-1)^m (\lambda_p - \lambda_o)^{2m-1} a_{o_p}^{(2m-1)} b_{p_i}^{(2m-1)} t_1^m t_2^{m-1}] , \\ |t_1| < \varepsilon_4, |t_2| < \varepsilon_5. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen mehrerer Veränderlicher ergibt

$$a_{o_p}^{(2m-1)} b_{p_i}^{(2m-1)} = 0 \quad (m \geq 2).$$

Fall I : $a_{o_p}^{(2m-1)} = 0, \quad m \geq 2$

Es folgt $a_{o_p}^{(2m-1)} b_{p_i}^{(2m-1)} = 0$ und mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Teile 2 und 3 der Beweisführung

$$f^{(2m-1)}(\lambda_o) = 0 \quad (m \geq 2).$$

Da die für f dargestellten Ausführungen auch für eine Stamm-

Funktion g von f im Gebiet G gelten, folgt $f''(\lambda_0) = 0, f'(\lambda_0) = 0, f(\lambda_0) = 0$, also

$$f^{(m)}(\lambda_0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

d.h., f ist identisch null.

Fall II : $b_{pp}^{(2m-1)} = 0, m \geq 2$

Es folgt wie im Fall I : f verschwindet identisch.

6. Sei M eine Skalarmatrix, $M = \lambda E$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) und in $\mathcal{U}$ gelte

$$F(X) = f(\lambda)E + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (X-M)^m B_m.$$

Ist r eine positive Zahl derart, daß f in $K_r := \{z \mid |z-\lambda| < r\}$ die Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-\lambda)^m$$

besitzt, dann gilt in $\mathcal{V}(K_r)$

$$F(X) = f(\lambda)E + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (X-\lambda E)^m.$$

Sei $\mathcal{W} = \mathcal{V}(K_r) \cap \mathcal{U}$.

In $\mathcal{W}$ gilt auf Grund des Identitätssatzes für Potenzreihen mehrerer Veränderlicher, angewandt auf die Komponenten von F

$$A_m (X-M)^m B_m = a_m (X-M)^m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Fall I : $a_m = 0$.

Behauptung: Es gilt $A_m = 0$ oder $B_m = 0$

Beweis:

Seien j_0, k_0 feste Zahlen mit $1 \leq j_0, k_0 \leq n$ und es gelte

$$a_{j_0, k_0}^{(m)} \neq 0.$$

Sei ε_1 eine positive Zahl derart, daß $X = M + \varepsilon_1 E_{j_0 k_0}^{[1]}$ in $\mathcal{W}$ liegt.

[1] Definition von $\tilde{E}_{j_0 k_0}$: s. Seite 59

Dann folgt aus $A_m (X-M)^m B_m = 0$

$$b_{k_0 \nu}^{(m)} = 0, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Sei k_0 eine feste Zahl mit $1 \leq k_0 \leq n$, $k_0 \neq k_0$. δ_2 sei eine positive Zahl derart, daß $X := M + \delta_2 (E_{k_0 k_0} + E_{k_0 k_0})$ in $\mathcal{M}$ liegt.

Dann folgt aus $A_m (X-M)^m B_m = 0$

$$b_{k_0 \nu}^{(m)} = 0, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Aus $a_{j_0 k_0}^{(m)} \neq 0$ folgt also $B_m = 0$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Fall II : $a_m \neq 0$

Behauptung: Es gilt $B_m = E$, $A_m = a_m E$.

Beweis:

Sei δ_3 eine positive Zahl derart, daß $X := M + \delta_3 E$ in $\mathcal{M}$ liegt.

Dann folgt aus $A_m (X-M)^m B_m = a_m (X-M)^m$

$$A_m = a_m B_m^{-1},$$

mithin

$$(X-M)^m B_m = B_m (X-M)^m.$$

Seien nun $\eta_1, \dots, \eta_n$ paarweise verschiedene positive Zahlen, so daß $X := M + \sum_{j=1}^n \eta_j E_{jj}$ in $\mathcal{M}$ liegt.

Aus $(X-M)^m B_m = B_m (X-M)^m$ folgt dann:

B_m ist eine Diagonalmatrix.

Sei ℓ_1 eine feste Zahl mit $1 \leq \ell_1 \leq n-1$. δ_4 sei eine positive Zahl derart, daß $X := M + \delta_4 (E_{\ell_1 \ell_1} + E_{\ell_1 \ell_1+1})$ in $\mathcal{M}$ liegt.

Dann folgt aus $(X-M)^m B_m = B_m (X-M)^m$

$$b_{\ell_1 \ell_1}^{(m)} = b_{\ell_1+1 \ell_1+1}^{(m)}.$$

Das bedeutet: B_m ist eine von Null verschiedene Skalarmatrix.

Der Normierung $b_{11}^{(m)} = 1$ wegen folgt $B_m = E \quad (m \in \mathbb{N})$.

Analog zeigt man, daß auch A_m Skalarmatrix ist.

Wegen $A_m \cdot B_m = a_m E$ folgt $A_m = a_m E$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zusammenfassung:

Hat $F \in [F]_M$ in $M = \lambda E$ eine Potenzreihenentwicklung der

Form

$$F(X) = f(\lambda)E + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (X - \lambda E)^m B_m$$

wobei eines der betragsgrößten Elemente von B_m ($B_m \neq 0$) durch 1 normiert ist, dann stimmt diese mit der auf dem Satz von Weyr basierenden Reihenentwicklung überein.

5. Die Berechnung der Koeffizienten der Taylor - Entwicklung

Die Berechnung des Funktionswertes $F(X)$ der analytischen Matrizenfunktion F erfordert - wie auf Seite 19 erwähnt - i.a. die Lösung der Eigenwertaufgabe für die Matrix X und ist daher insbesondere im Fall von Matrizen höherer Ordnung mit beträchtlichem Rechenaufwand verbunden.

Die Berechnung wird bedeutend einfacher, wenn man die Faber - Entwicklung eines einfach zusammenhängenden, beschränkten Gebiets, welches die Eigenwerte von X enthält, kennt. Man kann dann $F(X)$ über die entsprechende Reihe in Matrizenpolynomen ermitteln.

Ein dritter Weg führt über die Taylor - Entwicklung von F. Liegt X im Konvergenzbereich der Taylor - Entwicklung von F um die Matrix X_0 , so kann $F(X)$ durch eine Partialsumme der Reihe approximiert werden. Das Verfahren ist natürlich nur dann brauchbar, wenn es gelingt, die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^m F(X_0)}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{m-1} j_m}}$$

zu berechnen.

Die Ermittlung der Ableitungen kann - wie im folgenden gezeigt wird - im wesentlichen auf die Berechnung von Integralen über meromorphe Funktionen längs geschlossener Jordankurven, also auf den Residuensatz reduziert werden.

Sei also f eine im Gebiet G der komplexen Ebene analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion, $X_c \in \mathcal{V}(G)$.

Zur Berechnung von $\frac{\partial^m F(X_0)}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{m-1} j_m}}$, $m \in \mathbb{N}$:

Mit den Bezeichnungen von Satz 19a gilt:

$$\frac{\partial^m F(X_0)}{\partial x_{j_1 j_2} \dots \partial x_{j_{m-1} j_m}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(X_1, \dots, X_m) \in S_m} \oint_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE - X_1} E_{X_1} \frac{E}{zE - X_2} \dots \frac{E}{zE - X_m} E_{X_m} \frac{E}{zE - X_c} dz$$

Sei J_0 die Jordansche Normalform von X_0 , T eine reguläre Matrix mit $X_0 = T^{-1} J_0 T$.

1. Schritt:

Behauptung: Die in der Ableitung auftretenden Integrale lassen sich über Linearkombinationen von Integralen des Typs

$$\int_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE - J_0} E_{\nu_1 \nu_2} \frac{E}{zE - J_0} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE - J_0} E_{\nu_{m-1} \nu_m} \frac{E}{zE - J_0} dz \quad \nu_1, \dots, \nu_m \in \{1, \dots, n\}$$

berechnen.

Beweis:

Es gilt

$$\frac{\partial F(X_0)}{\partial x_{i_1 i_2} \dots \partial x_{i_{2m-1} i_{2m}}} =$$

$$= T^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^n \int_{\gamma} \frac{E}{zE - J_0} T E_x T^{-1} \frac{E}{zE - J_0} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE - J_0} T E_{x_m} T^{-1} \frac{E}{zE - J_0} dz \right] T$$

$$\text{Mit } T E_{x_k} T^{-1} = \sum_{\ell_1, \ell_2=1}^n e_{\ell_1 \ell_2}^{(x_k)} E_{\ell_1 \ell_2} \quad (k=1, \dots, m)$$

folgt

$$\frac{\partial F(X_0)}{\partial x_{i_1 i_2} \dots \partial x_{i_{2m-1} i_{2m}}} =$$

$$T^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=1}^n e_{\ell_1 \nu_1}^{(x_1)} \dots e_{\ell_m \nu_m}^{(x_m)} \int_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE - J_0} E_{\nu_1 \nu_2} \cdot \dots \cdot E_{\nu_{m-1} \nu_m} \frac{E}{zE - J_0} dz \right] T$$

2. Schritt:

Die Berechnung des Integrals

$$\int_{\gamma} f(z) \frac{E}{zE - J_0} E_{\nu_1 \nu_2} \frac{E}{zE - J_0} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE - J_0} E_{\nu_{m-1} \nu_m} \frac{E}{zE - J_0} dz, \quad \begin{matrix} \nu_k = 1, \dots, n, \\ k = 1, \dots, m, \end{matrix}$$

läßt sich auf den Residuensatz zurückführen.

Beweis:

J_0 habe die Elementarteiler $(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}, \dots, (\lambda - \lambda_u)^{\mu_u}$

Da $zE - J_0$ ($z \in \gamma$) eine Jordansche Normalform ist, ist nach

Satz 4 $(zE - J_0)^{-1}$ eine verallgemeinerte Diagonalmatrix, die

als p-ten Diagonalblock die Untermatrix

Weiterhin gilt:

Das Produkt: $(zE - J_0)^{-1} E_{\nu_{k-1} \nu_k} \cdot (zE - J_0)^{-1} E_{\nu_{k+1} \nu_{k+2}}$

ist höchstens dann von Null verschieden, wenn mit $\nu_{k+1} = \eta_{s-1} + t_s$,

$1 \leq t_s \leq \mu_s$ für ν_k die Bedingung

$$\eta_{s-1} + 1 \leq \nu_k \leq \nu_{k+1}$$

erfüllt ist.

Seien $\nu_1, \dots, \nu_m$ feste Indizes mit $1 \leq \nu_k \leq n$ ($k=1, \dots, m$)

und q_0, q_1 feste Zahlen mit $1 \leq q_0, q_1 \leq u$.

Es gelte

$$\nu_1 = \eta_{q_0} + t_{q_0} \quad \text{mit} \quad 1 \leq t_{q_0} \leq \mu_{q_0},$$

$$\nu_m = \eta_{q_1} + t_{q_1} \quad \text{mit} \quad 1 \leq t_{q_1} \leq \mu_{q_1}.$$

Dann hat der Integrand

$$f(z) \frac{E}{zE - J_0} E_{\nu_1 \nu_2} \cdot \dots \cdot \frac{E}{zE - J_0} E_{\nu_{m-1} \nu_m} \frac{E}{zE - J_0}$$

höchstens eine Untermatrix vom Typ $(t_{q_0}, \mu_{q_1} - t_{q_1} + 1)$ mit nicht

verschwindenden Elementen. Die Elemente sind in G meromorphe

Funktionen des Typs

$$\frac{f(z)}{(z - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_u)^{\alpha_u}}$$

mit natürlichen $\alpha_1, \dots, \alpha_u$.

Die Berechnung des Matrizenintegrals läßt sich also auf Integrale

des Typs

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_u)^{\alpha_u}} dz$$

zurückführen. Diese lassen sich mit Hilfe des Residuensatzes

berechnen.

VIII DIE MATRIZENINTEGRATION $\int_{\Gamma} R(z) dz$

1. Definition

f sei eine in einem Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Die Komponenten von $\Gamma = \|\Gamma_k\|$ seien rektifizierbare Kurven:

$$\Gamma_k = \{z \mid z = z_k(t), a \leq t \leq b\} \quad , k = 1, \dots, n.$$

In Anlehnung an die Bezeichnung der Komponenten heißt Γ eine rektifizierbare Matrixkurve. Es gelte $\Gamma \subset \mathcal{V}(G)$.

Für die Komponenten F_{ij} von F ($i, j = 1, \dots, n$) werden wie folgt

Integrale definiert:

$$\int_{i-a}^b F_{ij}(z(t)) dz_k(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N F_{ij}(z(t_\nu)) [z_k(t_\nu) - z_k(t_{\nu-1})] \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

$$S(T) \rightarrow 0$$

Dabei ist $T = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ eine Einteilung des Intervalls

$$[a, b] \quad \text{mit} \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b, \quad \bar{c}(T) = \max_{1 \leq \nu \leq N} |t_\nu - t_{\nu-1}|$$

Die Definition ist von der für die Kurve Γ_k gewählten Parameterdarstellung unabhängig:

Sei $z_k(\tau)$ mit $\tau \in [\alpha, \beta]$ eine zweite Parameterdarstellung von Γ_k .

Es existiert eine ^{stetige} eineindeutige, monotone, Abbildung von $[\alpha, \beta]$ auf

$[\alpha, \beta]$. Auf Grund der Abbildung bewirkt eine Einteilung T von $[\alpha, \beta]$

eine Einteilung T' von $[\alpha, \beta]$ und umgekehrt; $\bar{c}(T)$ strebt dann

und nur dann gegen Null, wenn $\bar{c}(T')$ dies tut. Da die Riemann-

schen Summen für T und T' übereinstimmen, ergibt der Grenzübergang

$$N \rightarrow \infty, \quad \delta(T) \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta(T') \rightarrow 0$$

$$\int_{t=a}^b F_{ij}(Z(t)) dz_{ek}(t) = \int_{\tau=a}^b F_{ij}(Z(\tau)) dz_{ek}(\tau)$$

Das Matrizenintegral $\int_{\Gamma} F(Z) dZ$ wird nun wie folgt definiert:

$$\int_{\Gamma} F(Z) dZ = \left\| \sum_{k=1}^n \int_{t=a}^b F_{jk}(Z(t)) dz_{ek}(t) \right\|$$

Ist Γ eine stetig differenzierbare Matrixkurve - das soll heißen: die Γ_{jk} sind stetig differenzierbar - dann gilt

$$\int_{\Gamma} F(Z) dZ = \int_{t=a}^b F(Z(t)) Z'(t) dt \quad \text{mit} \quad Z'(t) = \| z'_{jk}(t) \| \quad , a \leq t \leq b. \quad [1]$$

2. Eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, daß die analytische Funktion f der komplexen Ebene mit der korrespondierenden Matrizenfunktion F nicht nur definitorisch zusammenhängt. Manche Eigenschaften von f lassen sich auf F übertragen. Besonders deutlich tritt die Analogie beim Vergleich der Definitionsbereiche zutage.

Im Hinblick auf die große Bedeutung des Cauchyschen Integralsatzes für die Funktionentheorie ist daher die Frage berechtigt, ob sich dieser auf analytische Matrizenfunktionen übertragen läßt. Es zeigt sich, daß der Integralsatz nicht in vollem Umfang verallgemeinert werden kann: Für den Integrationsweg müssen Zusatzbe-

[1] Dieses Integral ist eines im Sinne der Definition von Seite 35.

dingungen gefordert werden.

Zunächst wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 22

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion, $\Gamma = \{\Gamma_{jk}\}$ eine in $\mathcal{V}(G)$ gelegene rektifizierbare Matrixkurve, $L(\Gamma_{jk})$ die Länge von Γ_{jk} ($j, k = 1, \dots, n$), $L(\Gamma) = \max_{1 \leq j, k \leq n} L(\Gamma_{jk})$; N sei eine beliebige, feste Matrixnorm.

Dann gilt:

$$N\left(\int_{\Gamma} F(Z) dZ\right) \leq r \cdot n \cdot L(\Gamma) \sup_{Z \in \Gamma} N(F(Z)) .$$

r ist eine Zahl, die nur von der Wahl der Norm abhängt.

Beweis:

M sei die Gesamtnorm. Es gilt

$$M\left(\int_{\Gamma} F(Z) dZ\right) = M\left(\left\|\sum_{\ell=1}^n \int_{t=a}^b F_{j\ell}(Z(t)) dz_{\ell k}(t)\right\|\right) \leq M\left(\left\|\sum_{\ell=1}^n \left|\int_{t=a}^b F_{j\ell}(Z(t)) dz_{\ell k}(t)\right|\right\|\right)$$

Für $Z \in \Gamma$ gilt

$$|F_{j\ell}(Z)| \leq \frac{1}{n} M(F(Z)) \leq \frac{1}{n} \sup_{Z \in \Gamma} M(F(Z)) .$$

Hieraus folgt

$$\left|\int_{t=a}^b F_{j\ell}(Z(t)) dz_{\ell k}(t)\right| \leq \frac{1}{n} \sup_{Z \in \Gamma} M(F(Z)) \cdot L(\Gamma) .$$

Geht man hiermit in die oben stehende Ungleichung ein, so folgt

$$M\left(\int_{\Gamma} F(Z) dZ\right) \leq M\left(\sup_{Z \in \Gamma} M(F(Z)) \cdot L(\Gamma)\right) = n \cdot L(\Gamma) \sup_{Z \in \Gamma} M(F(Z)) .$$

Seien nun τ_1, τ_2 positive Zahlen mit

$$\tau_1 \leq \frac{M(A)}{m(A)} \leq \tau_2, \quad A \in \mathcal{C}^n.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} N\left(\int_{\Gamma} F(Z) dZ\right) &\leq \tau_2 \cdot n \cdot L(\Gamma) \sup_{Z \in \Gamma} M(F(Z)) \\ &\leq \frac{\tau_2}{\tau_1} n L(\Gamma) \sup_{Z \in \Gamma} N(F(Z)). \end{aligned}$$

Mit $\tau := \frac{\tau_2}{\tau_1}$ ergibt sich hieraus die Behauptung:

$$N\left(\int_{\Gamma} F(Z) dZ\right) \leq \tau \cdot n L(\Gamma) \cdot \sup_{Z \in \Gamma} N(F(Z)).$$

Satz 23 Cauchyscher Integralsatz

Sei f eine im Gebiet $G, G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion, $Z_0 = \|z_{jk}^{(0)}\|$ eine feste Matrix aus $\mathcal{V}(G)$. Dann existiert eine Matrix $R' = \|\tau_{jk}'\|$ mit positiven Elementen derart, daß der Polyzylinder $\Delta(Z_0, R')$ zu $\mathcal{V}(G)$ gehört und für jede Matrixkurve $\Gamma = \|\Gamma_{jk}\|$ mit

$$\Gamma_{jk} = \{Z \mid Z = z_{jk}^{(0)} + \tau_{jk}' e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}, \quad 0 < \tau_{jk} < \tau_{jk}' \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

$$\int_{\Gamma} F(Z) dZ = 0 \quad \text{gilt.}$$

Beweis:

1. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von Z_0 .

B sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit

$\lambda_j \in B \quad (j = 1, \dots, n), \quad B \subset G$ und

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(Z), \quad Z \in \mathcal{V}(B).$$

die Entwicklung von F nach Faber-Polynomen bezüglich B .

Da $\mathcal{V}(B)$ Gebiet ist, gibt es eine Matrix R' mit positiven Elementen, so daß

$$\Delta(z_0, R') \subset \mathcal{V}(B) \subset \mathcal{V}(G)$$

und
$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(z) \quad , \quad z \in \Delta(z_0, R'),$$
 gilt.

2. Behauptung:

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Gamma} a_m p_m(z) dz,$$

Beweis:

Sei M die Gesamtnorm.

Nach Satz 22 gilt:

$$M\left(\int_{\Gamma} \sum_{m=N}^{\infty} a_m p_m(z) dz\right) \leq n \cdot L(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} M\left(\sum_{m=N}^{\infty} a_m p_m(z)\right)$$

Da die Entwicklung nach Faber - Polynomen auf Γ gleichmäßig konvergiert (Satz 16), gilt bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes N

$$M\left(\int_{\Gamma} \sum_{m=N}^{\infty} a_m p_m(z) dz\right) \leq n \cdot \varepsilon \cdot L(\Gamma).$$

Hieraus folgt aber

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Gamma} a_m p_m(z) dz.$$

3. Berechnung von $J_N := \int_{\Gamma} \sum_{m=0}^N a_m p_m(z) dz$;

Es gilt: $\sum_{m=0}^N a_m p_m(z) = \sum_{m=0}^N b_m z^m$.

Mithin folgt

$$J_N = \sum_{m=0}^N b_m \int_{\Gamma} z^m dz.$$

Berechnung von $\int_{\Gamma} z^m dz$:

Mit der Bezeichnung $z^m = \|z_{j_k}^{(m)}\|$ folgt:

$$Z_{j\bar{k}}^{(m)} = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{m-1}=1}^n Z_{j\mu_1} Z_{\mu_1\mu_2} \dots Z_{\mu_{m-1}k}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} Z^m dZ &= \left\| \sum_{\ell=1}^n \int_{t=0}^{2\pi} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{m-1}=1}^n Z_{j\mu_1}(t) Z_{\mu_1\mu_2}(t) \dots Z_{\mu_{m-1}k}(t) dz_{\ell k}(t) \right\| \\ &= \left\| \sum_{\ell=1}^n \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{m-1}=1}^n \int_{t=0}^{2\pi} Z_{j\mu_1}(t) Z_{\mu_1\mu_2}(t) \dots Z_{\mu_{m-1}k}(t) z'_{\ell k}(t) dt \right\| \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{2\pi} Z_{j\mu_1}(t) Z_{\mu_1\mu_2}(t) \dots Z_{\mu_{m-1}k}(t) z'_{\ell k}(t) dt &= \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} [z_{j\mu_1}^{(0)} + r_{j\mu_1} e^{it}] \dots [z_{\mu_{m-1}k}^{(0)} + r_{\mu_{m-1}k} e^{it}] \cdot i r_{\ell k} e^{it} dt \\ &= \sum_{\nu=1}^{m+1} c_{j\mu_1 \dots \mu_{m-1}k \ell \nu} \int_{t=0}^{2\pi} e^{i\nu t} dt = 0 \end{aligned}$$

Es folgt also $\int_{\Gamma} Z^m dZ = 0$,

mithin $J_N = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = 0$,

d.h. aber $\int_{\Gamma} F(Z) dZ = 0$.

Damit ist der Satz bewiesen.

3. Die Cauchyschen Integralformeln in der Darstellung der Matrizenintegration

Die in Satz 7 formulierten Cauchyschen Integralformeln für analytische Matrizenfunktionen beziehen sich auf das auf Seite 35 definierte Integral. Sie können aber - wie im folgenden gezeigt wird, auch mit Hilfe der auf Seite 81 eingeführten Matrizenintegration dargestellt werden.

Satz 24 Folgerung aus Satz 7

f sei analytisch im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, und es seien F bzw. $F^{(m)}$ die mit f bzw. deren Ableitungen $f^{(m)}$ korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen ($m \in \mathbb{N}$).

Es sei $\Gamma = \|\gamma_{jk}\|$ mit

$$\gamma_{jk} = \begin{cases} \{z \mid z = z_1(t) = 0, 0 \leq t \leq 2\pi\} & j \neq k \\ \{z \mid z = z_2(t), 0 \leq t \leq 2\pi\} & j = k \end{cases}$$

γ_{jj} sei eine geschlossene Jordankurve, die zusammen mit ihrem Innengebiet P_{jj} zu G gehört; X sei eine Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in P_{jj} liegen

Dann gilt:

$$F^{(m)}(X) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{(z-X)^{m+1}} dz, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis:

Sei $\frac{F(z)}{(z-X)^{m+1}} = \|\gamma_{jk}(z)\|$.

Da γ_{jk} , $j \neq k$, eine entartete Kurve ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(Z)}{(Z-X)^{m+1}} dZ &= \frac{m!}{2\pi i} \left\| \int_{t=0}^{2\pi} g_{jk}(Z(t)) dz_2(t) \right\| \\ &= \frac{m!}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \|g_{jk}(Z(t))\| dz_2(t) \end{aligned}$$

Wegen Satz 4 und Satz 7 folgt

$$\begin{aligned} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(Z)}{(Z-X)^{m+1}} dZ &= \frac{m!}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_2(t))}{[z_2(t)E-X]^{m+1}} dz_2(t) \\ &= \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma_{jj}} \frac{f(z)}{(zE-X)^{m+1}} dz = F^{(m)}(X), \quad (m \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

4. Andere Integralformeln

In den Cauchyschen Integralformeln ist der Zähler des Integranden eine **Matrix** spezieller Gestalt, nämlich eine **Skalarmatrix**, und nur der **Nenner** eine **eigentliche Matrix**. Im Unterschied hierzu bestehen in den Integraldarstellungen des folgenden Satzes (Satz 25) sowohl **Nenner** als auch Zähler des Integranden i.a. aus **eigentlichen Matrizen**. Dafür ist aber die Integrationskurve stärkeren Beschränkungen unterworfen als bei den Cauchyschen Formeln.

Die Integralformel des Satzes 26 beruht darauf, daß die Komponenten einer analytischen Matrizenfunktion analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher sind und für diese die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel gilt. Sie kann als eine Verallgemeinerung des Gaußschen Mittelwertsatzes gedeutet werden.

Satz 25

f sei analytisch im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, und es seien F bzw. $F^{(m)}$ die mit f bzw. deren Ableitungen $f^{(m)}$ korrespondierenden analytischen Matrizenfunktionen ($m \in \mathbb{N}$).

Sei $X \in \mathcal{V}(G)$, J die Jordansche Normalform von X mit

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_u \end{pmatrix}, \quad J_p = \begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}_{(\mu_p)}, \quad 1 \leq p \leq u,$$

und T eine reguläre Matrix mit $X = T^{-1} J T$.

B sei ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von G mit $\lambda_p \in B$,

$p = 1, \dots, u$, und $\Gamma' = \|\Gamma'_{jk}\|$ eine Matrixkurve mit $\Gamma'_{jk} \subset B$ und

$$\Gamma'_{jk} = \begin{cases} \{z \mid z = \zeta_p(t) = \lambda_p + \zeta_p e^{i(t + \alpha_p)}, 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ \text{für } j=k \text{ und } \sum_{v=1}^{p-1} \mu_v < j \leq \sum_{v=1}^p \mu_v \\ \\ \{z \mid z = \zeta(t) = 1, 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ \text{für } k=j+1 \text{ und } \sum_{v=1}^{p-1} \mu_v < j < \sum_{v=1}^p \mu_v \\ \\ \{z \mid z = \zeta(t) = 0, 0 \leq t \leq 2\pi\} \text{ sonst} \end{cases}$$

wobei ζ_p und α_p mit $0 \leq \alpha_p < 2\pi$ feste nicht-negative Zahlen sind

($p = 1, \dots, u$). Γ sei eine Matrixkurve mit $\Gamma = \{W \mid W = T^{-1} Z T, Z \in \Gamma'\}$

Dann gilt

$$F^{(m)}(X) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(W)}{(W-X)^{m+1}} dW, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

1. Behauptung: Der Integrand ist eindeutig bestimmt, d.h., für jede Matrix W aus Γ gilt:

$$F(W)(W-X)^{-(m+1)} = (W-X)^{-(m+1)} F(W).$$

Beweis: Sei $Z \in \Gamma'$ mit $W = T^{-1} Z T$.

Es gilt

$$\begin{aligned} F(W)(W-X)^{-(m+1)} &= T^{-1} F(Z) T [T^{-1}(Z-J)T]^{- (m+1)} \\ &= T^{-1} F(Z) (Z-J)^{-(m+1)} T. \end{aligned}$$

Da $F(Z)$, $(Z-J)^{-(m+1)}$ verallgemeinerte Diagonalmatrizen und die Diagonalblöcke von $(Z-J)^{-(m+1)}$ skalare Matrizen sind, folgt

$$\begin{aligned} F(W)(W-X)^{-(m+1)} &= T^{-1} (Z-J)^{-(m+1)} F(Z) T \\ &= (W-X)^{-(m+1)} F(W). \end{aligned}$$

2. Es genügt zu zeigen, daß $F^{(m)}(J) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{F(Z)}{(Z-J)^{m+1}} dZ$ gilt.

Beweis: Da Γ und Γ' stetig differenzierbare Matrixkurven sind, folgt

$$\begin{aligned} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(W)}{(W-X)^{m+1}} dW &= \frac{m!}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{F(W(t))}{[W(t)-X]^{m+1}} W'(t) dt \\ &= \frac{m!}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{F(T^{-1}Z(t)T)}{[T^{-1}Z(t)T - T^{-1}J T]^{m+1}} T^{-1}Z'(t)T dt \\ &= T^{-1} \frac{m!}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{F(Z(t))}{[Z(t)-J]^{m+1}} Z'(t) dt T \\ &= T^{-1} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{F(Z)}{(Z-J)^{m+1}} dZ T. \end{aligned}$$

Gilt nun

$$F^{(m)}(J) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{F(Z)}{(Z-J)^{m+1}} dZ,$$

dann folgt mit Rücksicht auf Satz 2

$$\frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(W)}{(W-X)^{m+1}} dW = F^{(m)}(X).$$

3. Behauptung:
$$F^{(m)}(J) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{F(z)}{(z-J)^{m+1}} dz$$

Beweis:

$$\int_{\Gamma'} \frac{F(z)}{(z-J)^{m+1}} dz = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{F(Z(t))}{[Z(t)-J]^{m+1}} Z'(t) dt$$

Nun gilt für $Z(t), 0 \leq t \leq 2\pi$,

$$F(Z(t)) = \left\| \begin{array}{ccc} \bar{F}_n(Z(t)) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \bar{F}_u(Z(t)) \end{array} \right\|$$

mit
$$\bar{F}_p(Z(t)) = F(J_p + s_p e^{i(t+\alpha_p)} E_{(\mu_p)}) \quad , \quad 1 \leq p \leq u,$$

$$Z'(t) = i \cdot \left\| \begin{array}{ccc} s_1 e^{i(t+\alpha_1)} E_{(\mu_1)} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & s_u e^{i(t+\alpha_u)} E_{(\mu_u)} \end{array} \right\|$$

und

$$\frac{E}{[Z(t)-J]^{m+1}} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{s_1^{m+1} e^{i(m+1)(t+\alpha_1)}} E_{(\mu_1)} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \frac{1}{s_u^{m+1} e^{i(m+1)(t+\alpha_u)}} E_{(\mu_u)} \end{array} \right\|$$

mithin also

$$\frac{F(z(t))}{[z(t) - J]^{m+1}} z'(t) = \left(\begin{array}{ccc} i \frac{F_1(z(t))}{g_1^m e^{im(t+\alpha_1)}} & & \\ & \ddots & \\ & & i \frac{F_u(z(t))}{g_u^m e^{im(t+\alpha_u)}} \end{array} \right)$$

Nach Satz 4 gilt für $p = 1, \dots, u$

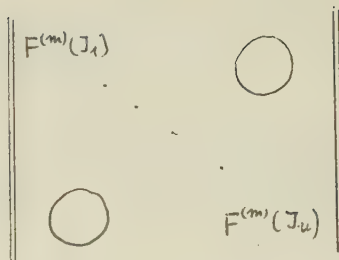
$$i \frac{\tilde{F}_p(z(t))}{g_p^m e^{im(t+\alpha_p)}} = \left(\begin{array}{ccc} i \frac{f(\lambda_p + g_p e^{i(t+\alpha_p)})}{g_p^m e^{im(t+\alpha_p)}} & \dots & \frac{i}{(\mu_p-1)!} \frac{f^{(\mu_p-1)}(\lambda_p + g_p e^{i(t+\alpha_p)})}{g_p^m e^{im(t+\alpha_p)}} \\ & & \\ & & i \frac{f(\lambda_p + g_p e^{i(t+\alpha_p)})}{g_p^m e^{im(t+\alpha_p)}} \end{array} \right)$$

$$i \int_{t=0}^{2\pi} \frac{F_p(z(t))}{g_p^m e^{im(t+\alpha_p)}} dt = \frac{2\pi i}{m!} \left(\begin{array}{ccc} f^{(m)}(\lambda_p) & \dots & \frac{f^{(m+\mu_p-1)}(\lambda_p)}{(\mu_p-1)!} \\ & & \\ & & f^{(m)}(\lambda_p) \end{array} \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{m!} F^{(m)}(J_p)$$

Damit folgt aber

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{F(z(t))}{[z(t) - J]^{m+1}} z'(t) dt = \frac{2\pi i}{m!}$$



$$\frac{m!}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{F(z(t))}{[z(t) - J]^{m+1}} z'(t) dt = F^{(m)}(J)$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Folgerung aus Satz 25

Mit den Bezeichnungen des Satzes 25 gilt:

$$F(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} F(W(t)) dt$$

Beweis:

Aus Teil 3 des Beweises zu Satz 25 folgt

$$F(J) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - J} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{F(z(t))}{z(t) - J} z'(t) dt$$

$$\text{Wegen } z'(t) = i [z(t) - J] \quad \text{folgt} \quad F(J) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} F(z(t)) dt$$

Nach Satz 2 folgt

$$F(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} F(W(t)) dt$$

Satz 26

Gaußscher Mittelwertsatz

Sei f eine im Gebiet $G, G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

$X = \|x_{jk}\|$ sei eine feste Matrix und $R = \|R_{jk}\|$ eine Matrix mit positiven Elementen derart, daß der Polyzylinder $\Delta(X, R)$ in $\mathcal{V}(G)$ liegt.

τ_{jk} und α_{jk} seien feste Zahlen mit

$$0 < \tau_{jk} < R_{jk}, \quad 0 \leq \alpha_{jk} < 2\pi, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Dann gilt

$$F(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n^2}} \int_{t_{11}=0}^{2\pi} \int_{t_{12}=0}^{2\pi} \dots \int_{t_{nn}=0}^{2\pi} F(\|x_{jk} + \tau_{jk} e^{i(t_{jk} + \alpha_{jk})}\|) dt_{11} \dots dt_{12} \dots dt_{nn} \quad [1]$$

Beweis:

Sei $F = \|F_{jk}\|$.

Da F_{jk} in $\Delta(X, R)$ nach Satz 17 als analytische Funktion in n^2

Veränderlichen aufgefaßt werden kann, gilt:

$$F_{jk}(X) = \frac{1}{(2\pi i)^{n^2}} \int_{|y_{11}-x_{11}|=r_{11}} \dots \int_{|y_{nn}-x_{nn}|=r_{nn}} \frac{F_{jk}(y_{11}, \dots, y_{nn})}{(y_{11}-x_{11}) \dots (y_{nn}-x_{nn})} dy_{11} \dots dy_{nn}, \quad (1 \leq j, k \leq n),$$

Die Variablentransformation $y_{nn} \rightarrow t_{nn}$ führt zu

$$F_{jk}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n^2} i^{n^2-1}} \int_{|y_{11}-x_{11}|=r_{11}} \frac{dy_{11}}{y_{11}-x_{11}} \int_{|y_{12}-x_{12}|=r_{12}} \frac{dy_{12}}{y_{12}-x_{12}} \dots \int_{t_{nn}=0}^{2\pi} F_{jk}(y_{11}, \dots, y_{nn-1}, x_{nn} + \tau_{nn} e^{i(t_{nn} + \alpha_{nn})}) dt_{nn}.$$

[1] Das Integral ist ein mehrfaches Integral im Sinne der Definition von Seite 35.

Transformiert man in der gleichen Weise $\gamma_{nn-1} \rightarrow t_{nn-1}$ usw.,
so erhält man schließlich

$$F_{jK}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n^2}} \int_{t_{11}=0}^{2\pi} \dots \int_{t_{nn}=0}^{2\pi} F_{jK}(x_{11} + \tau_{11} e^{i(t+\tau_{11})}, \dots, x_{nn} + \tau_{nn} e^{i(t+\tau_{nn})}) dt_{nn} \dots dt_{11}$$

Die Zusammenfassung der n^2 Komponenten $F_{jK}(X)$ zu einer Matrix liefert schließlich die Behauptung.

5. Das Maximumprinzip

Bezeichnungen:

Ist f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion, $\mathcal{E}$ eine Teilmenge von $\mathcal{V}(G)$ und N eine beliebige, aber feste Matrixnorm, dann sei

$$S_N(F, \mathcal{E}) = \sup_{X \in \mathcal{E}} N(F(X)).$$

Ist $\mathcal{H}$ die Menge der Folgen (X_m) aus $\mathcal{E}$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m \in \partial \mathcal{E}$
oder $\lim_{m \rightarrow \infty} N(X_m) = \infty$, dann sei

$$S_N(F, \partial \mathcal{E}) = \sup_{(X_m) \in \mathcal{H}} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} N(F(X_m)).$$

Satz 27

Maximumprinzip

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion, $\mathcal{E}$ eine nicht-leere offene Teilmenge von $\mathcal{V}(G)$. Es gilt:

1. $S_N(F, \mathcal{E}) = S_N(F, \partial \mathcal{E})$,
2. Aus $f \neq \text{const.}$ folgt für alle $X \in \mathcal{E}$: $N(F(X)) < S_N(F, \mathcal{E})$.

Beweis:

1. Sei $X = \|x_{jk}\|$ eine feste Matrix aus $\mathcal{V}(G)$ und $R = \|R_{jk}\|$ eine Matrix mit positiven Elementen derart, daß der Polyzylinder $\Delta(X, R)$ in $\mathcal{V}(G)$ liegt.

Sind r_{jk}, α_{jk} feste Zahlen mit $0 < r_{jk} < R_{jk}, 0 \leq \alpha_{jk} < 2\pi, 1 \leq j, k \leq n$, dann gilt nach Satz 26

$$F(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{11}=0}^{2\pi} G_{11}(t_{11}) dt_{11}$$

mit

$$G_{11}(t_{11}) = \frac{1}{(2\pi)^{n^2-1}} \int_{t_{12}=0}^{2\pi} \dots \int_{t_{nn}=0}^{2\pi} F(\|x_{jk} + r_{jk} e^{i(t_{jk} + \alpha_{jk})}\|) dt_{nn} \dots dt_{12}$$

Mit Rückgriff auf die Darstellung des Integrals als Grenzwert

Riemannscher Summen folgt

$$N(F(X)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_{11}=0}^{2\pi} N(G_{11}(t_{11})) dt_{11}$$

Nun ist

$$G_{11}(t_{11}) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{12}=0}^{2\pi} G_{12}(t_{11}, t_{12}) dt_{12}$$

mit

$$G_{12}(t_{11}, t_{12}) = \frac{1}{(2\pi)^{n^2-2}} \int_{t_{13}=0}^{2\pi} \dots \int_{t_{nn}=0}^{2\pi} F(\|x_{jk} + r_{jk} e^{i(t_{jk} + \alpha_{jk})}\|) dt_{13} \dots dt_{nn}$$

und es folgt

$$N(G_{11}(t_{11})) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_{12}=0}^{2\pi} N(G_{12}(t_{11}, t_{12})) dt_{12}$$

mithin

$$N(F(X)) \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{t_{12}=0}^{2\pi} \int_{t_{11}=0}^{2\pi} N(G_{12}(t_{11}, t_{12})) dt_{12} dt_{11}.$$

Die Fortsetzung des Verfahrens führt nach n^2 Schritten schließlich zu

$$N(F(X)) \leq \frac{1}{(2\pi)^{n^2}} \int_{t_{11}=0}^{2\pi} \dots \int_{t_{nn}=0}^{2\pi} N(F(\|x_{jk} + r_{jk} e^{i(t_{jk} + \alpha_{jk})}\|)) dt_{nn} \dots dt_{11},$$

2. Beweis der ersten Behauptung: $S_N(F, \mathcal{E}) = S_N(F, \partial\mathcal{E})$

a) Es gilt $S_N(F, \partial\mathcal{E}) \leq S_N(F, \mathcal{E})$.

Beweis:

Sei $((X_m))$ eine Folge aus $\mathcal{E}$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m \in \partial\mathcal{E}$ oder $\lim_{m \rightarrow \infty} N(X_m) = \infty$.

Für alle m aus $\mathbb{N}$ gilt $N(F(X_m)) \leq S_N(F, \mathcal{E})$, mithin $S_N(F, \partial\mathcal{E}) \leq S_N(F, \mathcal{E})$.

b) Es gilt auch $S_N(F, \mathcal{E}) \leq S_N(F, \partial\mathcal{E})$.

Beweis:

Fall I: $S_N(F, \mathcal{E}) = \infty$.

Dann existiert eine Folge $((X_m))$ aus $\mathcal{E}$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} N(F(X_m)) = \infty$.

Hat nun $((X_m))$ einen Häufungspunkt X_0 , so muß $X_0 \in \partial\mathcal{E}$ gelten;

denn $X_0 \in \mathcal{E}$ würde mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Norm zu

$N(F(X_0)) = \infty$ führen, Widerspruch! Aus $X_0 \in \partial\mathcal{E}$ folgt aber $S_N(F, \mathcal{E}) \leq S_N(F, \partial\mathcal{E})$.

Hat $((X_m))$ keinen Häufungspunkt, dann gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} N(X_m) = \infty$. Hier-

aus folgt mit $\lim_{m \rightarrow \infty} N(F(X_m)) = \infty$ aber $S_N(F, \partial\mathcal{E}) = \infty$, also eben-

falls $S_N(F, \mathcal{E}) \leq S_N(F, \partial\mathcal{E})$.

Fall II: $S_N(F, \mathcal{E}) < \infty$.

Beweis indirekt. Annahme: $S_N(F, \mathcal{E}) > S_N(F, \partial\mathcal{E})$

Dann gibt es eine Matrix $X_1 \in \mathcal{E}$ mit $N(F(X_1)) = S_N(F, \mathcal{E})$.

Bezeichnet $\Delta(X_1, \tau)$ eine offene Kugel um X_1 [1],

$$\Delta = \bigcup_{\Delta(X_1, \tau) \subset \mathcal{E}} \Delta(X_1, \tau),$$

so muß für jedes $X \in \Delta$

$$N(F(X)) = S_N(F, \mathcal{E})$$

gelten.

Beweis indirekt: Angenommen, für $X_2 \in \Delta$ gilt $N(F(X_2)) < S_N(F, \mathcal{E})$

und es sei $X_1 = \|X_{jk}^{(w)}\|$, $X_2 = \|X_{jk}^{(w)} + \tau_{jk}^{(w)} e^{i\alpha_{jk}^{(w)}}\|$.

Da die Norm eine stetige Funktion ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für

$$X = \|X_{jk}^{(w)} + \tau_{jk}^{(w)} e^{i\beta_{jk}}\|$$

mit

$$\beta_{jk} = \begin{cases} \alpha_{jk}^{(w)} & \text{für } (j, k) \neq (m, n) \\ \alpha_{jk}^{(w)} + t_{jk} & \text{mit } |t_{jk}| < \delta \quad \text{für } j=k=n \end{cases}$$

$$N(F(X)) < S_N(F, \mathcal{E}) - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, \text{ fest})$$

gilt.

Hieraus folgt zunächst

$$\begin{aligned} N\left(\frac{1}{2\pi} \int_{t_{mn}=0}^{2\pi} F(\|X_{jk}^{(w)} + \tau_{jk}^{(w)} e^{i(t_{jk} + \alpha_{jk}^{(w)})}\|) dt_{mn}\right) \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_{mn}=0}^{2\pi} N(F(\|X_{jk}^{(w)} + \tau_{jk}^{(w)} e^{i(t_{jk} + \alpha_{jk}^{(w)})}\|)) dt_{mn} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} N(\dots) dt_{mn} + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} N(\dots) dt_{mn} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2\delta}{2\pi} [S_N(F, \mathcal{E}) - \varepsilon] + \frac{2\pi - 2\delta}{2\pi} S_N(F, \mathcal{E})$$

$$= S_N(F, \mathcal{E}) - \frac{\delta\varepsilon}{\pi} ,$$

dann

$$N\left(\frac{1}{2\pi} \int_{t_{nn-1}=0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{t_{nn}=0}^{2\pi} F(\| \dots \|) dt_{nn} dt_{nn-1}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_{nn-1}=0}^{2\pi} \left[S_N(F, \mathcal{E}) - \frac{\delta\varepsilon}{\pi} \right] dt_{nn-1} = S_N(F, \mathcal{E}) - \frac{\delta\varepsilon}{\pi} ,$$

und nach n^2 Schritten schließlich

$$N(F(X_n)) \leq S_N(F, \mathcal{E}) - \frac{\delta\varepsilon}{\pi} :$$

im Widerspruch zur Annahme $N(F(X_n)) = S_N(F, \mathcal{E})$.

Damit ist auch für den Fall II, $S_N(F, \mathcal{E}) < \infty$, gezeigt, daß

$$S_N(F, \mathcal{E}) \leq S_N(F, \mathcal{O}(\mathcal{E})) \quad \text{gilt.}$$

Aus den in den Unterabschnitten 2a), 2b) bewiesenen Ungleichungen folgt die erste Behauptung.

3. Beweis der 2. Behauptung:

Aus $f \neq \text{const.}$ folgt $N(F(X)) < S_N(F, \mathcal{E})$ für alle $X \in \mathcal{E}$.

Beweis indirekt:

Sei $f \neq \text{const.}$ Annahme: Es gibt ein $X_0 \in \mathcal{E}$ mit $N(F(X_0)) = S_N(F, \mathcal{E})$.

a) Sei $R = \|R_{jR}\|$ eine Matrix mit positiven Elementen derart, daß der Polyzylinder $\Delta(X_0, R)$ in $\mathcal{E}$ liegt.

Wie in Teil 2 des Beweises folgt dann aus $N(F(X_0)) = S_N(F, \mathbb{C})$

$$N(F(X)) = S_N(F, \mathbb{C}) \quad \text{für } X \in \Delta(X_0, R).$$

Sei J_0 die Jordansche Normalform von X_0 , T_1 eine reguläre Matrix mit $X_0 = T_1^{-1} J_0 T_1$.

Durch geringfügige Änderung der Eigenwerte von J_0 kann man eine Matrix $J_0^{(i)}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten bilden, so daß $T_1^{-1} J_0^{(i)} T_1 \in \Delta(X_0, R)$ gilt. Da die Nullstellen von f und f' isoliert liegen, kann man ferner erreichen, daß f und f' für die Eigenwerte von $J_0^{(i)}$ nicht verschwinden.

Sei $J_0^{(i)}$ die Jordansche Normalform von $J_0^{(i)}$, T_2 eine reguläre Matrix mit $T_2^{-1} J_0^{(i)} T_2 = J_0^{(i)}$. Dann gilt mit der Bezeichnung $T = T_2 \cdot T_1$

$$T^{-1} J_0^{(i)} T \in \Delta(X_0, R).$$

$J_0^{(i)}$ ist Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten

$\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)}$; ferner gilt $f(\lambda_j^{(i)}) \neq 0$, $f'(\lambda_j^{(i)}) \neq 0$ ($j=1, \dots, n$).

b) Die Abbildung $L: \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ mit

$$L(X) = T X T^{-1} \quad X \in \mathbb{C}^{n^2},$$

ist homöomorph.

Da $\Delta(X_0, R)$ offen ist, ist folglich auch

$$\{W \mid W = L(X), X \in \Delta(X_0, R)\}$$

offen.

Nach Konstruktion liegt $J_0^{(i)}$ in der letztgenannten Menge.

Es existiert also eine Matrix $R^{(i)} = \|R_{jk}^{(i)}\|$ mit positiven Elementen, so daß gilt:

$$\Delta(J_0^{(i)}, R^{(i)}) \subset \{W \mid W = L(X), X \in \Delta(X_0, R)\}.$$

Mit der Norm N ist auch N_T , definiert durch

$$N_T(A) = N(T^{-1}AT), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

eine Norm.

Für $W \in \Delta(J_0'', R^n)$ gilt

$$\begin{aligned} N_T(F(W)) &= N(T^{-1}F(W)T) \\ &= N(F(T^{-1}WT)), \end{aligned}$$

und wegen $T^{-1}WT \in \Delta(X_0, R)$ folgt

$$N_T(F(W)) = S_W(F_1 \mathcal{E}).$$

c) Die Komponenten $K_{j,j}''$ von R'' seien o.B.d.A. bereits so gewählt, daß f in den Kreisscheiben

$$K_j = \{z \mid |z - \lambda_j^{(0)}| \leq R_{j,j}''\} \quad (j=1, \dots, n)$$

umkehrbar ist.

Die Urbilder der Strecken

$$\Gamma_j = \{w \mid w \in f[K_j], \arg w = \arg f(\lambda_j^{(0)})\}$$

unter f ,

$$\gamma_j = f^{-1}[\Gamma_j],$$

sind Jordansche Kurven ($j=1, \dots, n$),

γ_j habe die Parameterdarstellung

$$z_j = \lambda_j^{(0)} + r_j(t) e^{i\varphi_j(t)}, \quad t \in [-1, 1],$$

mit $z_j(t) = \lambda_j^{(0)}$ und sei so orientiert, daß für $t > 0$

$$|f(\lambda_j^{(0)} + r_j(t) e^{i\varphi_j(t)})| > |f(\lambda_j^{(0)})|$$

gilt ($j=1, \dots, n$).

Sei $\eta_1 = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{|f(\lambda_j^{(0)} + r_j(1) e^{i\varphi_j(1)})|}{|f(\lambda_j^{(0)})|}$. Es gilt $\eta_1 > 1$.

Sei η_2 eine feste Zahl mit $1 < \eta_2 < \eta_1$.

Wegen der Stetigkeit von $|f|$ auf γ_j und der Stetigkeit von γ_j gibt es feste Zahlen t_j mit $0 < t_j < 1$, so daß gilt

$$\frac{|f(\lambda_j^{(0)} + \tau_j(t_j)e^{i\varphi_j(t_j)})|}{|f(\lambda_j^{(0)})|} = \eta_2, \quad j=1, \dots, n.$$

Sei

$$J_1 = \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1^{(0)} + \tau_1(t_1)e^{i\varphi_1(t_1)} & \bigcirc \\ & \vdots \\ \bigcirc & \lambda_n^{(0)} + \tau_n(t_n)e^{i\varphi_n(t_n)} \end{array} \right\|$$

J_1 liegt in $\Delta(J_0'', R')$. Es gilt

$$F(J_1) = \left\| \begin{array}{cc} \eta_2 |f(\lambda_1^{(0)})| e^{i \arg f(\lambda_1^{(0)})} & \bigcirc \\ & \vdots \\ \bigcirc & \eta_2 |f(\lambda_n^{(0)})| e^{i \arg f(\lambda_n^{(0)})} \end{array} \right\|$$

$$F(J_1) = \eta_2 F(J_0'').$$

Nun gilt aber wegen $J_1 \in \Delta(J_0', R'')$

$$N_T(F(J_1)) = N_T(F(J_0'')),$$

Damit folgt aber $\eta_2 = 1$. Widerspruch zu $\eta_2 > 1$

Die Annahme, es existiert ein $X_0 \in \mathcal{E}$ mit $N(F(X_0)) = S_N(F, \mathcal{E})$ ist also falsch.

Falls f nicht konstant ist, gilt daher für jedes $X \in \mathcal{E}$

$$N(F(X)) < S_N(F, \mathcal{E}).$$

6. Das Schwarsche Lemma

f sei in einem den Nullpunkt enthaltenden Gebiet G der komplexen Ebene analytisch und habe in $K = \{z \mid |z| < r\}$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{m=p}^{\infty} a_m z^m \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Dann hat die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion F in $\mathcal{V}(K)$ die Entwicklung

$$\bar{F}(X) = \sum_{m=p}^{\infty} a_m X^m \quad (\text{Folgerung aus Satz 1})$$

Ist N eine beliebige, aber feste Matrixnorm, dann existiert ein positives $\tau = \tau(N)$, so daß die Potenzreihendarstellung insbesondere in $\{X \mid N(X) < \tau\}$ gilt.

Satz 28 Schwarzsches Lemma

f sei in einem Gebiet G mit $0 \in G \subset \mathbb{C}$ analytisch und habe im Nullpunkt die Entwicklung $f(z) = \sum_{m=p}^{\infty} a_m z^m$.

N sei eine beliebige, feste Matrixnorm und $r > 0$ eine Zahl, so daß in $\{X \mid N(X) < r\}$ für die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion F $\bar{F}(X) = \sum_{m=p}^{\infty} a_m X^m$ gilt.

Sei $S(F, r) = \sup_{N(X) < r} N(\bar{F}(X))$.

Dann gilt für jede Matrix X mit $N(X) < r$:

$$N(\bar{F}(X)) < S(F, r) \left[\frac{N(X)}{r} \right]^p.$$

Beweis:

1. Sei X_0 eine feste Matrix mit $0 < N(X_0) < r$.

Da für $0 < |t| < r$

$$N\left(t \frac{1}{N(x_0)} x_0\right) < r$$

gilt, ist durch

$$W(t) = \frac{1}{t^p} F\left(t \frac{1}{N(x_0)} x_0\right), \quad 0 < |t| < r,$$

eine matrixwertige Funktion W definiert, die dort die Entwicklung

$$W(t) = a_p \left[\frac{x_0}{N(x_0)} \right]^p + a_{p+1} \left[\frac{x_0}{N(x_0)} \right]^{p+1} t + a_{p+2} \left[\frac{x_0}{N(x_0)} \right]^{p+2} t^2 + \dots$$

besitzt.

W kann im $t=0$ stetig ergänzt werden.

2. Behauptung $\sup_{|t|<r} N(W(t)) \leq \sup_{|s|=r} \overline{\lim}_{t \rightarrow s} N(W(t)).$

Beweis:

$$M_1 := \sup_{|t|<r} N(W(t)) \quad , \quad M_2 := \sup_{|s|=r} \overline{\lim}_{t \rightarrow s} N(W(t)) \quad ,$$

Gibt es kein t_0 , $|t_0| < r$, mit $N(W(t_0)) = M_1$, dann ist die Behauptung richtig.

Sei nun t_1 , $|t_1| < r$, eine Zahl mit $N(W(t_1)) = M_1$.

Die Komponenten von $W = \|w_{jk}\|$ sind in $|t| < R$ analytisch in der Variablen t und es gilt daher

$$w_{jk}(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} w_{jk}(t_1 + \rho e^{i(\vartheta+\alpha)}) d\vartheta, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

mit $0 < \rho < r - |t_1|$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Es folgt

$$W(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} W(t_1 + \rho e^{i(\vartheta+\alpha)}) d\vartheta \quad [1]$$

[1] Definition des Integrals: s. Seite 35

und mit Rückgriff auf die Darstellung des Integrals als Grenzwert Riemannscher Summen

$$N(W(t_1)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} N(W(t_1 + \rho e^{i(\varphi + \alpha)}) d\varphi.$$

Hieraus folgt $N(W(t_1 + \rho e^{i(\varphi + \alpha)})) = M_1$ für $0 < \rho < r - |t_1|$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Beweis indirekt:

Angenommen, es existiert ein ρ_1 mit $\rho_1 < r - |t_1|$ und ein α_1 mit

$0 \leq \alpha_1 < 2\pi$, so daß

$$N(W(t_1 + \rho_1 e^{i(\alpha_1)})) < M_1 - 2\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

gilt.

Wegen der Stetigkeit der Norm gibt es dann ein $\eta > 0$, so daß

für $\eta \in [0, \eta]$

$$N(W(t_1 + \rho_1 e^{i(\alpha_1 + \eta)})) < M_1 - \varepsilon$$

gilt.

Hieraus folgt - Beweis wie im Teil 2 des Beweises zum Maximumprinzip - $N(W(t_1)) < M_1$. Widerspruch!

Es gilt also $N(W(t_1 + \rho e^{i(\varphi + \alpha)})) = M_1$ für $0 < \rho < r - |t_1|$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Da die Kreisscheibe $|t - t_1| \leq r - |t_1|$ die Peripherie $|t| = r$ berührt, folgt $M_1 \leq M_2$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

3. Aus $M_1 \leq M_2$ folgt für $0 < |t| < r$

$$\frac{1}{|t|^p} N(F(t \frac{1}{N(x_0)} x_0)) \leq \sup_{|x_0|=r} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{|t|^p} N(F(t \frac{1}{N(x_0)} x_0)) \right] \leq \frac{S(F, r)}{r^p}.$$

Dies gilt insbesondere für $t = N(x_0)$:

$$\frac{1}{[N(x_0)]^p} N(F(x_0)) \leq \frac{S(F, r)}{r^p}.$$

Da X_0 zwar fest ist, in den Grenzen $0 < N(X_0) < \tau$ aber beliebig gewählt werden kann, folgt

$$N(F(X)) \leq S(F, \tau) \left[\frac{N(X)}{\tau} \right]^p, \quad 0 < N(X) < \tau.$$

Die Abschätzung gilt auch für $X=0$.

IX ZUR WERTANNAHME ANALYTISCHER MATRIZENFUNKTIONEN

1. Über die Existenz von Lösungen der Gleichung $F(X) = Y$

Ist f eine in einem Gebiet $G, G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion, X eine Matrix aus $\mathcal{V}(G)$, dann liegen die Eigenwerte von $F(X)$ in $f[G]$ [1].

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $F(X) = Y$ ist also $Y \in \mathcal{V}(f[G])$.

Die Bedingung ist aber nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei w_0 ein fester Wert aus $f[G]$, und für jedes z aus $f^{-1}(\{w_0\})$ gelte $f^{(v)}(z) = 0, v = 1, \dots, n-1$ ($n > 1$). Dann hat $F(X) = Y_0$ mit

$$Y_0 = \left\| \begin{array}{cc} w_0 & 1 \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ & w_0 \end{array} \right\|$$

keine Lösung.

Beweis indirekt:

Annahme: Es existiert ein $X_0 \in \mathcal{V}(G)$ mit $F(X_0) = Y$

Sei J_0 die Jordansche Normalform von X_0 , T eine reguläre Matrix mit $X_0 = T^{-1} J_0 T$.

Es gilt $Y_0 = T^{-1} F(J_0) T$.

[1] Folgerung aus Satz 4 (Seite 28)

Da die Diagonalblöcke von J_0 von der Form

$$\begin{vmatrix} z & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & z \end{vmatrix}_{(r)} \quad , r \leq n,$$

mit $z \in f^{-1}[\{w_0\}]$ sind, muß wegen $f'(z) = f''(z) = \dots = f^{(r-1)}(z) = 0$
 $F(J_0)$ Skalarmatrix sein, also auch Y_0 . Widerspruch!

Eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung
 $F(X) = Y$ ist in dem folgenden Satz enthalten:

Satz 29

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit
 f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Es gilt:

1. $F[\mathcal{V}(G)] \subset \mathcal{V}(f[G])$.
2. Aus $f'(z) \neq 0$, $z \in G$, folgt $F[\mathcal{V}(G)] = \mathcal{V}(f[G])$.

Beweis:

1. Beweis der 1. Behauptung:

Ist Y aus $F[\mathcal{V}(G)]$, dann liegen die Eigenwerte von Y sämtlich
in $f[G]$ und mithin gilt $Y \in \mathcal{V}(f[G])$.

2. Beweis der 2. Behauptung:

Zu zeigen ist: Im Fall $f'(z) \neq 0$, $z \in G$, folgt aus $Y \in \mathcal{V}(f[G])$
 $Y \in F[\mathcal{V}(G)]$.

Sei $Y \in \mathcal{V}(f[G])$.

J sei die Jordansche Normalform von Y und U eine reguläre Matrix
mit $Y = U^{-1} J U$.

Sei

$$J = \left\| \begin{array}{ccc} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{array} \right\| \quad \text{mit} \quad J_p = \left\| \begin{array}{ccc} w_p & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & w_p \end{array} \right\|_{(\mu_p)} \quad , 1 \leq p \leq u.$$

Es gilt $w_p \in f[G]$, $p=1, \dots, u$.

Seien $z_1, \dots, z_u$ feste Zahlen mit $z_p \in f^{-1}[\{w_p\}]$, $p=1, \dots, u$,

J' eine Jordansche Normalform mit

$$J' = \left\| \begin{array}{ccc} J'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J'_u \end{array} \right\| \quad , \quad J'_p = \left\| \begin{array}{ccc} z_p & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & z_p \end{array} \right\|_{(\mu_p)} \quad , 1 \leq p \leq u.$$

Wegen $f'(z_p) \neq 0$ existiert eine reguläre Matrix T_p (der Ordnung μ_p) mit $F(J'_p) = T_p J_p T_p^{-1}$, $p=1, \dots, u$ [1].

Sei die Matrix T durch

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_u \end{array} \right\|$$

definiert.

Dann gilt

$$F(J) = T J T^{-1}$$

$$F(T^{-1} J' T) = J$$

$$F(U^{-1} T^{-1} J' T U) = Y,$$

d.h. aber, $U^{-1} T^{-1} J' T U$ ist Lösung der Gleichung $F(X) = Y$.

[1] s. Gantmacher: Matrizenrechnung, Bd.I, Seite 145

Gantmacher behandelt u.a. die Gleichungen $X^m = 0$ und $\log X = Y$ [1]

Die dort dargestellte Methode zur Ermittlung der Lösungen kann auch im allgemeinen Fall, $F(X) = Y$, angewandt werden.

2. Die Umkehrung der analytischen Matrizenfunktion

Satz 30

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion. X sei aus $\mathcal{V}(G)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ seien deren paarweise verschiedene Eigenwerte. Gilt $f'(\lambda_j) \neq 0$ ($j=1, \dots, s$), $f(\lambda_\nu) \neq f(\lambda_\mu)$ für $\nu \neq \mu$ ($\nu, \mu=1, \dots, s$), dann existiert eine Umgebung $\mathcal{U}(X)$ von X , in der F eineindeutig ist.

Beweis:

Wegen $f'(\lambda_1) \neq 0$ existiert eine Umgebung $\mathcal{U}(\lambda_1)$ von λ_1 , in der f eineindeutig ist ($j=1, \dots, s$). Sie sei so gewählt, daß insbesondere $f[\mathcal{U}(\lambda_\nu)] \cap f[\mathcal{U}(\lambda_\mu)] = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$ ($\nu, \mu=1, \dots, s$) gilt. Dann ist f mit Rücksicht auf $f(\lambda_\nu) \neq f(\lambda_\mu)$ für $\nu \neq \mu$ in

$$\mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^s \mathcal{U}(\lambda_j)$$

eineindeutig. Das bedeutet: Auf $f[\mathcal{U}]$ ist die Umkehrfunktion f^{-1} gegeben, also auf $\mathcal{V}(f[\mathcal{U}])$ die mit f^{-1} korrespondierende analytische Matrizenfunktion. Da die letztere nach Satz 6 Umkehrfunktion von F ist, wird sie in Übereinstimmung mit der üblichen Nomenklatur mit F^{-1} bezeichnet.

Sei nun $\mathcal{U}(X) = \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

[1] s. Gantmacher: Matrizenrechnung, Bd.I, Seite 214 ff.

Dann gilt für $X_1, X_2 \in \mathcal{V}(U)$ mit $F(X_1) = F(X_2)$ zunächst

$$F^{-1}(F(X_1)) = F^{-1}(F(X_2)),$$

weil $F(X_1), F(X_2) \in \mathcal{V}(F[U])$, und hieraus

$$X_1 = X_2.$$

Also ist F in $\mathcal{V}(X)$ eineindeutig.

f sei eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion. Dann heißt F schlicht, wenn für $X_1, X_2 \in \mathcal{V}(G)$ aus $F(X_1) = F(X_2)$ stets $X_1 = X_2$ folgt.

Satz 31

Sei f eine im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Ist f eine schlichte Funktion, dann auch F .

Beweis:

Seien X_1, X_2 aus $\mathcal{V}(G)$ und es gelte

$$F(X_1) = F(X_2).$$

Da f schlicht ist, existiert in $\mathcal{V}(f[G])$ die Funktion F^{-1} .

Wegen $F(X_1), F(X_2) \in \mathcal{V}(f[G])$ folgt daher

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(X_1)) &= F^{-1}(F(X_2)), \\ X_1 &= X_2. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: F ist schlicht.

3. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Liouville

Satz 32

Sei f eine ganze Funktion, F die mit f korrespondierende analytische Matrizenfunktion.

Ist eine Komponente von $F = \|F_{jk}\|$ beschränkt, dann ist F eine Konstante der Form aE ($a \in \mathbb{C}$).

Beweis:

1. Die beschränkte Komponente liege in oder oberhalb der Hauptdiagonalen.

Man betrachte die Teilmenge

$$\{X \mid X = \lambda E + H, \lambda \in \mathbb{C}\} \quad [1]$$

des Definitionsgebietes von F .

Da die Komponenten von $F(\lambda E + H)$ in und oberhalb der Hauptdiagonalen durch die Quotienten

$$\frac{f^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1,$$

gegeben sind, folgt aus der Beschränktheit einer dieser Komponenten, daß F ein Polynom höchstens $(n-1)$ -ten Grades ist.

Sei F durch

$$F(X) = a_0 E + a_1 X + \dots + a_r X^r$$

gegeben.

$\bar{F}_{\nu\mu}$ ($\mu \geq \nu$) sei die beschränkte Komponente.

Sei $A = \|a_{jk}\|$ eine Matrix mit

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = \nu \text{ oder } k = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: $A^m = 2^{m-1} A \quad (m \in \mathbb{N})$.

Die Berechnung von $F(tA)$, $t \in \mathbb{C}$, liefert für die Komponente $F_{\gamma\mu}$:

$$\bar{F}_{\gamma\mu}(tA) = a_0 + a_1 t + 2a_2 t^2 + \dots + 2^{e-1} a_e t^e \quad (t \in \mathbb{C}),$$

Aus der Beschränktheit von $\bar{F}_{\gamma\mu}$ folgt nach dem Satz von Liouville:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_e = 0$$

Damit ist gezeigt: F ist eine Konstante.

2. Die beschränkte Komponente liege unterhalb der Hauptdiagonalen.

Sei $\bar{F}_{\mu\nu}$ die beschränkte Komponente $(\mu > \nu)$.

Die Transformation $V: F[\mathfrak{d}(G)] \rightarrow F[\mathfrak{d}(G)]$

definiert durch

$$V(Y) = V_{\gamma\mu} Y V_{\gamma\mu}, \quad Y \in F[\mathfrak{d}(G)]$$

ist eine bijektive Abbildung $[\mathfrak{d}]$.

Sie bewirkt, daß die Komponente $\bar{F}_{\mu\nu}(X)$ von $F(X)$ in $V_{\gamma\mu} F(X) V_{\gamma\mu}$ die Position mit dem Indexpaar (ν, μ) einnimmt.

Da V bijektiv ist, folgt daher, daß mit $\bar{F}_{\mu\nu}$ auch $F_{\gamma\mu}$ beschränkt ist.

Hieraus folgt nach Teil 1 des Beweises: F ist eine Konstante.

[$\mathfrak{d}$] $V_{\gamma\mu}$ sei die Vertauschungsmatrix, die aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen von ν -ter und μ -ter Zeile entsteht.

4. Eine Verallgemeinerung des Identitätssatzes

Satz 33

f_1 und f_2 seien im Gebiet G , $G \subset \mathbb{C}$, analytische Funktionen, F_1 und F_2 die mit ihnen korrespondierenden analytischen Matrixfunktionen.

Sei $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}(G)$ offen und (ν, μ) ein festes Indexpaar derart, daß für die Komponenten ${}^1F_{\nu\mu}, {}^2F_{\nu\mu}$ von $F_1 = \|{}^1F_{jk}\|$, $F_2 = \|{}^2F_{jk}\|$

$${}^1F_{\nu\mu}(X) = {}^2F_{\nu\mu}(X), \quad X \in \mathcal{U},$$

gilt.

Dann folgt im Fall $\nu = \mu$: $F_1 = F_2$, Im Fall $\nu \neq \mu$: $F_1 = F_2 \oplus c E$ mit festem $c \in \mathbb{C}$.

Beweis:

1. Sei X_0 eine feste Matrix aus $\mathcal{U}$.

J_0 sei die Jordansche Normalform von X_0 und T_1 eine reguläre Matrix mit

$$X_0 = T_1^{-1} J_0 T_1.$$

Durch Variation der Eigenwerte von J_1 wird nun eine Matrix J_1 erzeugt, deren Eigenwerte paarweise verschieden sind und für die

$$T_1^{-1} J_1 T_1 \in \mathcal{U}$$

gilt.

Sei J die Jordansche Normalform von J_1 , T_2 eine reguläre Matrix mit $J_1 = T_2^{-1} J T_2$.

Sei $T = T_2 T_1$.

Dann liegt $T^{-1} J T$ in $\mathcal{U}$, und J ist eine Diagonalmatrix.

Man wähle nun ein festes $\varepsilon > 0$ derart, daß für $t \in [0, \varepsilon]$

$$J + E_{11} \cdot t \quad [1]$$

Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten ist und

$$X(t) := T^{-1} (J + E_{11} t) T, \quad t \in [0, \varepsilon],$$

in $\mathcal{U}$ liegt.

2. Berechnung der Komponenten ${}^2F_{\nu\mu}(X(t))$, $\ell = 1, 2$:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von J .

Dann gilt mit den Bezeichnungen $T = \|t_{jk}\|$, $T^{-1} = \|t_{jk}^{(-1)}\|$.

$${}^2F_{\ell}(X(t)) = T^{-1} F_{\ell}(J + E_{11} t) T =$$

$$= \begin{vmatrix} + & - & - & - & - & + \\ + & - & - & - & - & + \\ t_{\nu 1}^{(-1)} & t_{\nu 2}^{(-1)} & \dots & \dots & \dots & t_{\nu n}^{(-1)} \\ + & - & - & - & - & + \\ + & - & - & - & - & + \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{\ell}(\lambda_1 + t) \\ t_{\ell}(\lambda_2) \\ \vdots \\ t_{\ell}(\lambda_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + & - & + & t_{1\mu} & * & - & + \\ & & & t_{2\mu} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ + & - & + & t_{n\mu} & + & - & + \end{vmatrix},$$

$${}^2F_{\nu\mu}(X(t)) = t_{\nu 1}^{(-1)} t_{1\mu} f_{\ell}(\lambda_1 + t) + t_{\nu 2}^{(-1)} t_{2\mu} f_{\ell}(\lambda_2) + \dots + t_{\nu n}^{(-1)} t_{n\mu} f_{\ell}(\lambda_n).$$

Da man o.E. annehmen kann, daß $t_{\nu 1}^{(-1)} t_{1\mu} \neq 0$ gilt, folgt

$${}^2F_{\nu\mu}(X(t)) = c_1 f_{\ell}(\lambda_1 + t) + c_{2\ell}, \quad \ell = 1, 2, \quad t \in [0, \varepsilon].$$

c_1 mit $c_1 \neq 0$ und c_{21}, c_{22} sind Konstanten.

3. Wegen ${}^1F_{\nu\mu}(X) = {}^2F_{\nu\mu}(X)$, $X \in \mathcal{U}$, folgt nun

$$c_1 f_1(\lambda_1 + t) + c_{21} = c_1 f_2(\lambda_1 + t) + c_{22},$$

$$f_1(\lambda_1 + t) = f_2(\lambda_1 + t) + \frac{c_{22} - c_{21}}{c_1}, \quad t \in [0, \varepsilon].$$

[1] Definition von E_{11} : s. Seite 59

Nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen folgt

$$f_1 = f_2 + \frac{c_{22} - c_{21}}{c_1} .$$

Fall I : $\nu \neq \mu$,

In diesem Fall folgt aus der letzten Beziehung und Satz 5 die

Behauptung:

$$F_1 = F_2 \oplus c E \quad \text{mit} \quad c = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_1}$$

Fall II : $\nu = \mu$,

Wie im Fall I folgt dann zunächst

$$F_1 = F_2 \oplus c E .$$

Wegen ${}^1F_{\nu\mu}(x) = {}^2F_{\nu\mu}(x)$, $x \in \mathcal{U}$, folgt $c=0$, mithin $F_1 = F_2$.

X L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- Buchheim, A. : An extension of a theorem of Professor Sylvester relating to matrices. *Phil. Mag.*, 22, 1886, S. 173 - 174
- Cipolla, M. : Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra. *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, Bd. 56, 1932, S. 144 - 154
- Dirac, P.A.M. : On Quantum Algebra. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Bd. 23, 1926, S. 412 - 418
- Faber, G. : Über polynomische Entwicklungen. *Math. Ann.*, Bd. 57, 1903, S. 389 - 408
- Fantappiè, L. : Analyse Algébrique. Le calcul des matrices. *Comptus Rendus*, Bd. 186, 1928, S. 619 - 621
- Ferrar, W.L. : Finite Matrices. Clarendon Press, 1951
- Gantmacher, F.R. : Matrizenrechnung, Bd. 1, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970
- Giorgi, G. : Nuove osservazione sulle funzioni delle matrici. *Rend. Accad. Naz. Lincei*, 8, 1928, S. 3 - 8
- Hensel, K. : Über Potenzreihen von Matrizen. *Journ. reine angew. Math.*, Bd. 155, 1926, S. 107 - 110
- Lancaster, P. : Theory of Matrices. Acad. Press, New York, London 1969
- Metzler, H.W. : On the Roots of Matrices. *Amer. J. Math.*, Bd. 14, 1892, S. 326 - 377
- Peano, G. : Intégration par séries des équations différentielles linéaires. *Math. Ann.*, Bd. 32, 1888, S. 450 - 456
- Phillips, H.B. : Functions of Matrices. *Amer. J. Math.*, Bd. 41, 1919, S. 266 - 278
- Richter, H. : Über Matrizenfunktionen. *Math. Annalen*, Bd. 122, 1950, S. 16 - 34
- Rinehart, R.F. : The Equivalence of Definitions of a Matrix Function. *Am. Math. Monthly*, 62, 1955, S. 395 - 414

- Rinehart, R.F. : The exponential representation of unitary matrices. Math. Mag. 37, 1964, S. 111 - 112
- Schwerdtfeger, H. : Les Fonctions de Matrices. Les Fonctions Univalentes. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 649, Paris, Herman, 1938
- Sylvester, J. : On the equation to the secular inequalities in the planetary theory. Phil. Mag., 16, 1883, S. 267 - 269
- Weyr, E. : Note sur la théorie de quantités complexes formées avec n unités principales. Bull. Sci. Math. II, Bd. 11, 1887
- Zurmühl, R. : Matrizen. Springer - Verlag, Berlin, 1964
- Smirnow, V.I., Lebedjew, N.A. : Functions of a Complex Variable. Constructive Theory. M.I.T. Press, Cambridge/Mass., 1968

Lebenslauf

geb.: 2. Aug. 1937

1943 - 1954 : Besuch von Volksschule bzw. Oberschule,

Abschluß: 10. Klasse

1954 - 1962 : Lehre und Berufstätigkeit als Maurer;

1956 - 1959 : Besuch einer privaten Abendober-
schule, Abschluß: Reifeprüfung (1960)

1962 - 1966 : Studium an der Pädagogischen Hochschule Berlin
(Lehrer mit dem Wahlfach Mathematik),

1966: Erste Staatsprüfung

1966 - 1971 : Lehrer an einer Berliner Grundschule bzw. Sonder-
schule, 1968: Zweite Staatsprüfung; Studien an der
Freien Universität Berlin in Mathematik und Physik

seit 1971 : Wiss. Ass. in der Fachdidaktik Mathematik an der
Pädagogischen Hochschule Berlin; 1973: Diplom in
Mathematik

6. Jan. 1976

Wolfgang R. Meyer

